

### ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 2.A

**c0.** Podaj cztery wyrazy ciągu:

a)  $a_n = \left(3 - \frac{1}{10^n}, \frac{1}{n^2}\right)$ ,  $a_1 = (\dots, \dots)$ ,  $a_2 = \dots$ ,  $a_3 = \dots$ ,  $a_4 = \dots$

b)  $b_k = (k, 1/k)$ ,

DEF. Mówimy, że ciąg  $a_n = (x_n, y_n)$  jest zbieżny do  $g = (x, y) \in \dots$ , gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \dots \forall_{n \in \mathbb{N}} n \geq N \Rightarrow |a_n - \dots| < \varepsilon.$$

Innymi słowy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall_{n \geq N} \sqrt{\dots + \dots} < \varepsilon.$$

**c1.** Udowodnimy, że granicą ciągu  $b_n = \left(\frac{4n+3}{2n+1}, \frac{5n}{6n^2+7}, \frac{8n}{n+9}\right)$  punktów z  $\mathbb{R}^3$  jest punkt  $g = \dots$ .

Zauważmy, że

$$|b_n - \dots| = \left| \left(2 + \frac{\dots}{2n+1}, \frac{5n}{6n^2+7}, 8 - \frac{72}{n+\dots}\right) - \dots \right| = \dots$$

$$\leq \dots$$

Stąd

dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  dla każdego naturalnego  $n \geq \dots$  mamy  $|b_n - g| < \varepsilon \square$

**c2.** Udowodnimy, że granicą ciągu  $a_n = \left(\frac{1}{\dots}, \frac{n-1}{\dots}\right)$  punktów płaszczyzny ( $\mathbb{R}^2$ )

jest punkt  $g = (\dots, \dots)$ . Zauważmy, że dla  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi:

$$\|a_n - (0, 1)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2n+3} - \dots\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n} - \dots\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(2n+3)^2} + \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{n(2n+3)} \sqrt{5n^2 + 12n + 9} \leq \frac{1}{n(2n+3)} \sqrt{26n^2} = \frac{\dots}{2n+3}.$$

Stąd

dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  dla każdego naturalnego  $n \geq \dots$  mamy  $|a_n - g| < \varepsilon \square$

Tw. Ciąg  $a_n = (x_n, y_n)$  jest zbieżny do  $g = (x, y)$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny po osiach, tzn.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ .

**c3.** Dzięki temu twierdzeniu, można (niemal) w pamięci obliczyć:

a) Dla  $a_n = \left( \frac{\sin(n^2 + 2)}{n + 1}, \frac{2n + 3}{4n + 5} \right)$  mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ( \dots , \dots )$

b) Dla  $b_n = \left( n \sin \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{n}{n + 1} \right)$  mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \dots$

c) Dla  $c_n = \left( \frac{n + 1}{\sqrt{n + 2}}, \frac{\sqrt{n + 3}}{n + 4} \right)$  mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \dots$

**c4.** Niech  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$  i niech  $a_n = (x_n, y_n)$ , gdzie  $x_n = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{n}$  i  $y_n = \frac{1}{2n+3}$ .

Wtedy granicą ciągu  $a_n$  jest para  $(\dots, \dots)$ , a granicą ciągu  $f(a_n)$  jest liczba  $\dots$ .

Podaj przykłady ciągów  $b_n = (x'_n, y'_n)$  zbieżnych do  $(0, 0)$  takich, że:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -\pi$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = +\infty$

**cK.** Karol Omyłek (jak to Karol) wypowiedział **błędne** zdania. Jakie to są błędy?

a) Każdy rosnący i ograniczony ciąg punktów płaszczyzny jest zbieżny.

b) Jeżeli ciąg  $(x_n)$  ma podciąg zbieżny do  $\pi$  i ciąg  $(y_n)$  ma podciąg zbieżny do  $e$ , to ciąg  $(a_n)$  zdefiniowany wzorem  $a_n = (x_n, y_n)$ , ma podciąg zbieżny do  $(\pi, e)$ .

**cZ.** Niech ciągi  $(a_n), (b_n), (c_n)$  będą takie, że  $c_m = a_m \cdot b_m$ , dla każdego  $m \in \mathbb{N}$ .

Oceń prawdziwość poniższych zdań (napisz PRAWDA albo FAŁSZ).

(A) Jeśli ciągi  $(a_n), (b_n)$  są zbieżne, to ciąg  $(c_n)$  jest zbieżny. ....

(B) Jeśli ciąg  $(c_n)$  jest zbieżny, to ciągi  $(a_n), (b_n)$  są zbieżne. ....

(C) Jeśli ciągi  $(a_n), (b_n)$  są zbieżne, to ciąg  $d_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  jest zbieżny. ....

(D) Jeśli ciąg  $d_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  jest zbieżny, to ciągi  $(a_n), (b_n)$  są zbieżne. ....

Uzasadnij dwie ze Swych odpowiedzi.