Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 3.a

Def. (wg Cauchy'ego) Dla $f : D \to \mathbb{R}$ i $p_0 \in \mathbb{R}^m$, gdzie p_0 jest punktem skupienia D (tzn. istnieje ciąg punktów z $D \setminus \{p_0\}$ zbieżny do p_0) definiujemy

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \to p_0} f(p) \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{p \in D \\ p \neq p_0}}{\forall} \quad |p - p_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(p) - g| < \varepsilon \ .$$

Czy to już kiedyś było?
Kiedy? Dokładnie toto?

Innymi słowy (dla $m = 2$, $p_0 = (x_0, y_0)$):

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{(x,y) \in D \setminus \{p_0\}}{\forall} \ \sqrt{\ \dots\dots^{\ 2} + \ \dots\dots^{\ 2}} < \delta \Rightarrow |f(\ \dots\ ) - g| < \varepsilon \ .$$

Oj coś to takie rozwlekłe!
Chyba już wolę poprzednie.
Dobrze, że $m = 2$, nie $m = 5$!

1. Pokażemy, że 0 jest granicą funkcji $f(x,y) = \dfrac{x^6y^2}{x^4+y^4}$ w punkcie $p_0 = (0,0)$.

Zauważmy, że :

$$|f(x,y) - \ \dots\ | = \left| \frac{\dots\dots}{x^4+y^4} - 0 \right| = \frac{x^6y^2}{x^4+y^4} = \ \dots\dots \ \cdot \frac{x^4}{x^4+y^4} \le x^2y^2 \cdot 1 \underset{\text{dla } y^2 \le 1}{\le} x^2.$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$,
gdy $x \in (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$ i $y \in (-1,1)$, i $(x,y) \neq (0,0)$, to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$,

skąd mamy:
jeśli $0 < |(x,y) - (0,0)| < \delta$, gdzie $\delta := \min\{\sqrt{\varepsilon}, \dots\}$, to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. □

2. Pokażemy, że 0 jest granicą funkcji $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ w punkcie $p_0 = (0,0)$.

Zauważmy, że :

$$|f(x,y) - \ \dots\ | = \left| \frac{\dots\dots}{x^2+y^2} - \dots \right| = \frac{\dots\dots}{x^2+y^2} = \ \dots\dots \ \cdot \frac{\dots}{x^2+y^2} \le \ \dots \ \cdot 1 \ \le \ \dots \ .$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$,
gdy $x \in$ .... i $y \in (-\dots, \dots)$, i $(x,y) \neq (0,0)$, to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$,

skąd mamy:
jeśli $0 < |(x,y) - (0,0)| < \delta$, gdzie $\delta :=$ .... , to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. □

Definicja Cauchy'ego jest równoważna następującej ciągowej definicji Heinego:

Def.' (wg Heinego) Niech $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ i $(x_0, y_0) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^2$. Mówimy, że g jest granicą f w (x_0, y_0), gdy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g$, dla każdego ciągu $((x_n, y_n))$ punktów z D zbieżnego do (x_0, y_0), o wyrazach różnych od (x_0, y_0).

3a). Czy istnieje granica funkcji $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ w punkcie $p_0 = (0,0)$?

Dla ciągu $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ mamy $f(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) =$ .... $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Z powyższego wiemy tylko, że <u>jeśli</u> f ma granicę w $(0,0)$, <u>to</u> ta granica jest równa 0.

Dokończymy wg definicji Cauchy'ego:

Zauważmy, że :

$$|f(x,y) - \ \ldots\ | = \left| \frac{\ldots\ldots}{x^2+y^2} - \ldots \right| = \ \ldots\ \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + \ \ldots\ \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \le \ \ldots\ \cdot 1 + \ \ldots\ \cdot 1.$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$,
gdy $0 < |(x,y) - (0,0)| < \delta$, gdzie $\delta :=$ .... , to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. □

3b). Czy istnieje granica funkcji $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^4+y^4}$ w punkcie $p_0 = (0,0)$?

Nie, bowiem:

dla ciągu $(\frac{1}{n}, 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ mamy $f(\frac{1}{n}, 0) =$ .... $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ ...

oraz

dla ciągu $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ mamy $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) =$ .... $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ ... .

Ponieważ te granice są <u>różne</u>, więc (z def. Heinego) f <u>nie ma</u> granicy w $(0,0)$. □

3c). Czy istnieje granica funkcji $f(x,y) = \dfrac{x^6+y^2}{x^2+y^2}$ w punkcie $p_0 = (0,0)$?

....

4). Czy istnieje granica funkcji $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^6+y^4)}{x^2+y^2}$ w punkcie $p_0 = (0,0)$?

Dla funkcji jednej zmiennej znamy Lemat $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ (co wynika z reguły ...).

Dla ciągu $p_n = (x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, gdzie $p_n \neq (0,0)$, mamy

$$f(p_n) = \frac{\sin(x_n^6+y_n^4)}{x_n^2+y_n^2} = \frac{\sin(x_n^6+y_n^4)}{x_n^6+y_n^4} \cdot \frac{x_n^6+y_n^4}{x_n^2+y_n^2} = \frac{\sin(x_n^6+y_n^4)}{x_n^6+y_n^4} \cdot \left(x_n^4 \cdot \frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2} + y_n^2 \cdot \frac{y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\right).$$

Korzystając z Lematu i oszacowań: $\frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2}, \frac{y_n^2}{x_n^2+y_n^2} \leq 1$ mamy $f(p_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\cdot(0+0) = 0$, czyli $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (z definicji Heinego). $\square$

Różne oznaczenia

Zdanie '$f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ ma w $p_0 = (0,0)$ granicę równą 0.' można zanotować na bardzo wiele sposobów, np.:

$$\lim_{p\to p_0} f(p) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = 0,$$

$$f(p) \xrightarrow[p\to p_0]{} 0, \qquad f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0, \qquad \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0, \qquad \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0.$$

Przestroga

Poniższe rachunki

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

nie dowodzą, że $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ jest równa 0.

Ta granica NIE ISTNIEJE!

Bowiem:

dla ciągu $(\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ mamy $\dfrac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0^2} =$ .... $\xrightarrow[n\to\infty]{}$ ...

oraz

dla ciągu $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ mamy $\dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} =$ .... $\xrightarrow[n\to\infty]{}$ ... .

Ponieważ te granice są <u>różne</u>, więc (wg Heinego) $\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ <u>nie ma</u> granicy w $(0,0)$. $\square$

Dowody poniższych twierdzeń są 'smutne' (wystarczy zastosować ....).

Tw. Niech $g_1 = \lim_{p\to p_0} f_1(p)$ i $g_2 = \lim_{p\to p_0} f_2(p)$. Wtedy:

$\lim_{p\to p_0} (f_1(p) + f_2(p)) =$ ......

$\lim_{p\to p_0} (f_1(p) - f_2(p)) =$ ......

$\lim_{p\to p_0} (f_1(p) \cdot f_2(p)) =$ ......

$\lim_{p\to p_0} 2^{f_1(p)} =$ ......

$\lim_{p\to p_0} \sin(f_1(p)) =$ ......

Jak pierwsze dwa 'wysłowić prozą'?

A co z ilorazem?

Jak uogólnić ostatnie dwa przykłady?

Niby łatwe, ale co z takim zadaniem?

5. Niech $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gdzie $h(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$, dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Niech $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Oceń poniższe zdania (napisz PRAWDA / FAŁSZ)

(A) Jeśli f i g mają granicę w p_0, to h ma granicę w p_0. ......

(B) Jeśli h ma granicę w p_0, to f i g mają granice w p_0. ......

i uzasadnij jedną z swych odpowiedzi.