Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 4b

Def. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i $(x_0,y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Dla wektora $\vec{v} = [v_x, v_y]$, $||\vec{v}|| = 1$ określamy *pochodną kierunkową f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora $\vec{v}$* wzorem

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Spostrzeżenie. Oczywiście: $f'_{[1,0]}(x, y) =$ .... , $f'_{[0,1]}(x, y) =$ ....

Przykład E. Dla $f(x, y) = xy^2$ i $\vec{v} = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ mamy

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{(x_0+\frac{1}{2}t)(y_0+\frac{\sqrt{3}}{2}t)^2-x_0y_0^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(x_0+\frac{1}{2}t)(y_0^2+\sqrt{3}ty_0+\frac{3}{4}t^2)-x_0y_0^2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{x_0y_0^2+x_0\sqrt{3}ty_0+x_0\frac{3}{4}t^2 \ + \ \frac{1}{2}ty_0^2+\frac{1}{2}t\sqrt{3}ty_0+\frac{1}{2}t\frac{3}{4}t^2-x_0y_0^2}{t} =$$

$$= \tfrac{1}{2}y_0^2 + \sqrt{3}x_0y_0.$$

Ogólnie: zauważmy, że:

$$\frac{f(x_0+t\cdot v_x,y_0+t\cdot v_y)-f(x_0,y_0)}{t} =$$

$$= \frac{f(x_0+t\cdot v_x,y_0+t\cdot v_y)-f(x_0,y_0+t\cdot v_y)}{t} + \frac{f(x_0,y_0+t\cdot v_y)-f(x_0,y_0)}{t} =$$

$$= \frac{f(x_0+t\cdot v_x,y_0+t\cdot v_y)-f(x_0,y_0+t\cdot v_y)}{t\cdot v_x} \cdot ... + \frac{f(x_0,y_0+t\cdot v_y)-f(x_0,y_0)}{...\cdot...} \cdot ... =$$

$$= \{\text{ z tw. L ... istnieją } \bar{t}, \hat{t} \text{ pomiędzy 0 i } t\ \} =$$

$$= f'_x(x_0 + \hat{t} \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y) \cdot ... + f'_y(x_0, y_0 + \bar{t} \cdot v_y) \cdot ...$$

dalej, przy założeniu,
że f'_x i f'_y są ciągłe:

$$\Big\downarrow \text{ przy } t\to 0$$

$$...... \cdot v_x + ... \cdot v_y .$$

Zatem mamy:

Tw. Gdy f jest klasy $\mathcal{C}^1$, to $f'_{\vec{v}} = f'_x \cdot v_x + f'_y \cdot v_y$.

Innymi słowy:

Tw. Gdy f jest klasy $\mathcal{C}^1$, to $f'_{\vec{v}} = \text{grad}\, f \circ \vec{v}$.

W powyższym użyto nowych oznaczeń:
grad $f := (f'_x, f'_y)$, f jest klasy $\mathcal{C}^1$ oznacza, że f ma ciągłe pochodne cząstkowe.

PRZYKŁAD. Dla $f(x,y) = x^2y^3$ i $\vec{v} = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$ mamy

$$f'_{\vec{v}}(x,y) = \text{grad}\, f \ \circ \vec{v} = (\ \ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots\ ) \circ \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ = \frac{6}{5}xy^3 + \frac{12}{5}x^2y^2.$$

TW. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $p_0 = (x_0, y_0)$ oraz $\text{grad} f(p_0) \neq (0,0)$. Wtedy

a) z punktu p_0 funkcja f rośnie najszybciej w kierunku wektora $\text{grad} f(p_0)$,
b) z punktu p_0 funkcja f maleje najszybciej w kierunku wektora $-\text{grad} f(p_0)$,
c) w punkcie p_0 wektor $\text{grad} f(p_0)$ jest prostopadły do poziomicy $\{p : f(p) = f(p_0)\}$.

D-D. Dla wektora jednostkowego $\vec{v}$ niech γ oznacza kąt pomiędzy $\vec{v}$ i $\text{grad} f(p_0)$. Dalej wystarczy zinterpretować wartość $f'_{\vec{v}}(p_0) = \vec{v} \circ \text{grad} f(p_0) = ||\text{grad} f(p_0)|| \cdot \cos\gamma$.

ZADANIE. (nieco trudniejsze) Punkt $p_0 = (1,2)$ leży na linii $L \subset \mathbb{R}^2$ o równaniu $4 = \sqrt{27 - x^3 - y^3 - xy}$. Znaleźć równie stycznej do L w punkcie p_0.

Zauważmy, że L jest poziomicą funkcji $f(x,y) = \sqrt{27 - x^3 - y^3 - xy}$. Mamy: $\text{grad}\, f = \left(\frac{-3x^2 - y}{2\sqrt{27 - x^3 - y^3 - xy}}, \frac{-3y^2 - x}{2\sqrt{27 - x^3 - y^3 - xy}}\right)$ i $\text{grad} f(p_0) = \text{grad} f(1,2) = \left(\frac{-5}{8}, \frac{-13}{8}\right)$.

Stąd punkt (x,y) leży na szukanej stycznej gdy (na podstawie punktu c))

wektory $(x-1, y-2)$, $\left(\frac{-5}{8}, \frac{-13}{8}\right)$ są prostopadłe,

czyli gdy

$$(x-1, y-2) \circ \left(\frac{-5}{8}, \frac{-13}{8}\right) = 0\ ,$$

skąd odpowiedź:

$$5(x-1) + 13(y-2) = 0\ .$$

A na deser:

Zagadka: czy prosta (w $\mathbb{R}^3$): $5(x-1) + 13(y-2) = 0$, $z = 4$ leży na płaszczyźnie stycznej do f w punkcie p_0? Czy to trzeba rachować?

* * *

DEF. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i (x_0,y_0) leży we wnętrzu $D \subset \mathbb{R}^2$. Mówimy, że f jest różniczkowalna w (x_0,y_0), gdy istnieją takie stałe A, B, że

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - (f(x_0,y_0) + A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

Gdy f jest różniczkowalna, to $A = f'_x(x_0,y_0)$ i $B = f'_y(x_0,y_0)$;
pochodną Df można utożsamiać z gradientem: $\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} (f'_x, f'_y)$ (inaczej: grad f).

DEF*. (Dokładniej i ogólniej.) Niech $f : D \to \mathbb{R}^n$ i p_0 leży we wnętrzu $D \subset \mathbb{R}^m$. Przekształcenie liniowe $\Phi : \mathbb{R}^{\cdots} \to \mathbb{R}^{\cdots}$ jest pochodną $(Df)(p_0)$, gdy

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(p_0+h) - (f(p_0) + \Phi(h))\,||}{||h||} = 0.$$

TW. Gdy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe, to f jest różniczkowalna.

DOWÓD. Zauważmy, że:

$$\left|\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-(f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x} - f'_x(x_0,y_0)\right| \cdot \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} +$$

$$+\left|\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} - f'_y(x_0,y_0)\right| \cdot \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

z tw. Lagrange'a istnieją $s, t \in (0,1)$ takie, że

$$= |f'_x(x_0+t\cdot\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0)| \cdot \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} +$$

$$+\left|f'_y(x_0, y_0+s\cdot\Delta y) - f'_y(x_0,y_0)\right| \cdot \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \leq$$

$$\leq |f'_x(x_0+t\cdot\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0)| \cdot 1 + \left|f'_y(x_0, y_0+s\cdot\Delta y) - f'_y(x_0,y_0)\right| \cdot 1$$

co, przy założeniu, że f'_x i f'_y są ciągłe, daje

$$\underset{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0\ . \qquad \square$$

TW. Gdy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to jest ciągła.

UWAGA. Istnieją funkcje nieciągłe, których pochodne cząstkowe wszędzie istnieją, np.: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, dla $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$ (sprawdź).
Istnieją nawet takie funkcje nieciągłe, które mają wszystkie pochodne kierunkowe.