Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 5a

Pochodne cząstkowe $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjami z podzbiorów $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}$, zatem można je dalej różniczkować; każdą i po x, i po y.

Np. dla $f(x,y) = 3x^4y^2$ mamy:

$$f'_x(x,y) = 12x^3y^2, \qquad f'_y(x,y) = 6x^4y$$

oraz

$$f''_{xx}(x,y) = 36x^2y^2,\ f''_{yx}(x,y) = 24x^3y, \quad f''_{xy}(x,y) = 24x^3y,\ f''_{yy}(x,y)(x,y) = 6x^3$$

Można też liczyć pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$$f'''_{xxx}(x,y) = 72xy^2,\ f'''_{yxx}(x,y) = 72x^2y,\ f'''_{xyx}(x,y) = \ \ldots\ldots\ ,\ f'''_{\ldots}(x,y) = \ \ldots\ldots\ ,$$

$$f'''_{\ldots}(x,y) = 72xy^2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$ (Ile ich jest?)

To nie przypadek, że wiele jest równych, bowiem

Tw. Gdy f jest klasy $\mathcal{C}^2$, czyli ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, to pochodne mieszane są równe, czyli $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$.

W innej notacji:

Tw. (Schwarza) Dla $f \in \mathcal{C}^2$ mamy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$.

Z tego twierdzenia wynikają równości pochodnych mieszanych wyższych rzędów (przy założeniu ich ciągłości). W szczególności:

Dla f-cji $f \in \mathcal{C}^3$ mamy (co najwyżej) cztery różne pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$,

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$.

Dla f-cji $f \in \mathcal{C}^4$ mamy (co najwyżej) pięć różnych pochodnych cząstkowych rzędu czwartego:

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$,

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$

....

....

UWAGA. Istnieją funkcje, których pochodne mieszane nie są równe. Mianowicie:

Wprost z definicji obliczmy $f''_{yx}(0,0)$ i $f''_{xy}(0,0)$ dla $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{gdy } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Potrzebne będą pochodne pierwszego rzędu:
oczywiście $f'_x(0,0) =$ ... $= f'_y(0,0)$ (bo ....);
poza $(0,0)$ obliczamy (ze wzorów): $f'_x(x,y) = \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\quad f'_y(x,y) = \frac{x(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Drugie pochodne mieszane w $(0,0)$ wyznaczamy wprost z definicji (licząc przyrosty wyznaczonych poprzednio pierwszych pochodnych):

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(0,0+h) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ldots\ldots - \ldots}{h} = \ldots\ldots ,$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{s\to 0} \frac{f'_{\ldots}(\ \ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots\ ) - f'_{\ldots}(\ \ldots\ ,\ \ldots\ )}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\ldots\ldots - \ldots}{s} = \ldots\ldots .$$

Zatem ....