

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 5B

PRZYKŁAD. Niech $\Phi = \Phi(m, r) = G \frac{M \cdot m}{r^2}$.

Okazuje się jednak, że m, r nie są zmiennymi wolnymi, są funkcjami pewnej zmiennej t , czyli: $m = m(t)$ oraz $r = r(t)$.

Wtedy $F = F(t) = \Phi(m(t), r(t)) = G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t))^2}$.

PROBLEM(1K). Jak wyznaczyć $F' = \frac{dF}{dt}$?

$$\begin{aligned} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} &= \frac{G \frac{M \cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} = \\ &= \frac{G \frac{M \cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{h} + \frac{G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} = \\ &= \frac{G \frac{M \cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{m(t+h) - m(t)} \cdot \frac{m(t+h) - m(t)}{h} + \frac{G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G \frac{M \cdot m(t)}{(r(t))^2}}{r(t+h) - r(t)} \cdot \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \Phi'_m \cdot m' + \Phi'_r \cdot r' \end{aligned}$$

Innymi znaczkami, w nieco ogólniejszej sytuacji:

Gdy $F = F(t, x, y) = \Phi(m(t, x, y), r(t, x, y))$, to $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}$.

Gdyby M nie było stałą, np. $M = M(t, x, y)$, to $\Phi = \Phi(M, m, r)$.

Wtedy wygodnie jest myśleć, że funkcje m, r formalnie też zależą od x, y (nie tylko od t). Teraz złożenie zależy od trzech zmiennych:

$$F = F(t, x, y) = \Phi(M(t, x, y), m(t, x, y), r(t, x, y))$$

i mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}.$$

REGUŁA ŁAŃCUCHA. (wersja) Niech $f(x, y, z)$, $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$ będą klasy \mathcal{C}^1 .

Wtedy dla $F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$

mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}.$$

D-D. (szkic dowodu pierwszego wzoru):

$$\begin{aligned} \frac{f(x(s+h,t), y(s+h,t), z(s+h,t)) - f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))}{h} &= \quad \{\text{dalej trik: } +\cos ik - \cos ik \dots\} \\ &= \frac{f(x(s+h,t), y(s+h,t), z(s+h,t)) - f(x(s,t), y(s+h,t), z(s+h,t))}{x(s+h,t) - x(s,t)} \cdot \frac{x(s+h,t) - x(s,t)}{h} + \\ &\quad + \frac{f(x(s,t), y(s+h,t), z(s+h,t)) - f(x(s,t), y(s,t), z(s+h,t))}{y(s+h,t) - y(s,t)} \cdot \frac{y(s+h,t) - y(s,t)}{h} + \\ &\quad + \frac{f(x(s,t), y(s,t), z(s+h,t)) - f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))}{z(s+h,t) - z(s,t)} \cdot \frac{z(s+h,t) - z(s,t)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'_x(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \cdot x'_s(s,t) + \\ &\quad + f'_y(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \cdot y'_s(s,t) + \\ &\quad + f'_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \cdot z'_s(s,t). \end{aligned}$$

Szczegóły uzupełniają: tw. Lagrange'a i założenia ciągłości. □

PRZYKŁAD. Niech $f(x, y, z) = x + xy^2z^3$, $x(s, t) = s + t^2$, $y(s, t) = s^2 - t$, $z(s, t) = st$ i $F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$. Można podstawić i zmusznie obliczać F'_s i F'_t , ALE powyższa reguła pozwala niemal automatycznie podać:

$$F'_s = f'_x \cdot x'_s + f'_y \cdot y'_s + f'_z \cdot z'_s = (1 + y^2z^3) \cdot (1) + (2xyz^3) \cdot (2s) + (3xy^2z^2) \cdot (t) =$$

i dalej wstawiamy za x, y, z :

$$= (1 + (s^2 - t)^2(st)^3) + 2(s + t^2)(s^2 - t)(st)^3 \cdot 2s + 3(s + t^2)(s^2 - t)^2(st)^2 \cdot t,$$

$$F'_t = \dots\dots\dots$$

PRZYKŁAD. Niech $z = ue^v + ve^{-u}$; $u = \ln r$, $v = s \cdot \ln r$. Wtedy

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = (e^v - ve^{-u}) \cdot \frac{1}{r} + (ue^v + e^{-u}) \cdot \frac{s}{r} = \dots\dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = (e^v - ve^{-u}) \cdot 0 + (ue^v + e^{-u}) \cdot \ln r = \dots\dots$$

PRZYKŁAD. (z 'innej bajki') Udowodnij: jeśli $z = \frac{y}{y^2 - a^2 \cdot x^2}$, to $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

WSKAZÓWKA. Wystarczy rachować.