Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 5c

Przykład A. Liczbę $A=\sqrt{4.01^2+3.02^2}$ można przybliżyć przez $\sqrt{4^2+3^2}=5\approx A$.

Można też inaczej:

Niech $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Wartość $A=f(4.01,3.02)$ można przybliżyć z równania płaszczyzny stycznej do f w punkcie $(4,3)$, tzn.

Obliczamy $f'_x(4,3)=\frac{2\cdot x}{2\sqrt{x^2+y^2}}|_{(4,3)}=0.8$, $f'_y(4,3)=\frac{2\cdot y}{2\sqrt{x^2+y^2}}|_{(4,3)}=0.6$ i równanie

płaszczyzny stycznej: $\qquad z=5+0.8\cdot(x-4)+0.6\cdot(y-3).$

Dalej traktujemy prawą stronę jako wzór funkcji $z=z(x,y)$, skąd mamy:

$$A\approx z(4.01,3.02)=5+0.8\cdot(4.01-4)+0.6\cdot(3.02-3)=5.02\ .$$

Żadna z tych dwóch odpowiedzi nie jest satysfakcjonująca, bo NIC nie powiedzieliśmy jak duży błąd może skrywać się pod wężykiem ($\approx$). Wyniknie to z poniższego

Tw. (Taylora, rzędu 2) Niech $f:D\to\mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0,y_0)(x,y)\subset\mathbb{R}^2$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x},\hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+R_2,$$

gdzie $R_2=\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(\hat{x},\hat{y})\cdot(x-x_0)^2+2f''_{yx}(\hat{x},\hat{y})\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)+f''_{yy}(\hat{x},\hat{y})\cdot(y-y_0)^2\right).$

Przykład A. c.d. Zauważmy:

$f(4.01,3.02)=f(4,3)+f'_x(4,3)\cdot(4.01–4)+f'_y(4,3)\cdot(3.02–3)+R_2$, czyli $A=5.02+R_2$.

Zatem informacja o błędzie kryje się w R_2, bo $\quad |A-5.02|=|R_2|=|\text{błąd}|$.

Obliczmy $f''_{xx}=\ ......\ =\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$, $f''_{yy}=\ ......\ =\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$, $f''_{xy}=...=\frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$,

niestety nie wiemy dokładnie w jakim punkcie je liczyć; pozostaje szacowanie:

$$|\text{błąd}|\ =|R_2|=\frac{1}{2}\left|f''_{xx}(\hat{x},\hat{y})\cdot 0.01^2+2f''_{yx}(\hat{x},\hat{y})\cdot 0.01\cdot 0.02+f''_{yy}(\hat{x},\hat{y})\cdot 0.02^2\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{y}^2}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}^3}\cdot 0.01^2+2\frac{|\hat{x}\hat{y}|}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}^3}\cdot 0.01\cdot 0.02+\frac{\hat{x}^2}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}^3}\cdot 0.02^2\right)\overbrace{\leq}^{\text{nier. tr.}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3.02^2}{5^3}\cdot 0.01^2+2\frac{4.01\cdot 3.02}{5^3}\cdot 0.01\cdot 0.02+\frac{4.01^2}{5^3}\cdot 0.02^2\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{4^2}{5^3}\cdot\frac{1}{10^4}+2\frac{5\cdot 4}{5^3}\cdot\frac{2}{10^4}+\frac{5^2}{5^3}\cdot\frac{4}{10^4}\right)=\frac{196}{2\cdot 5^3\cdot 10^4}=\frac{196\cdot 4}{2^3\cdot 5^3\cdot 10^4}\leq\frac{800}{10^7}=\frac{8}{10^5}<\frac{1}{10^4}.$$

Zatem owe przybliżenie płaszcz. styczną daje $A\approx 5.02$ z błędem mniejszym od 10^{-4}.

Przykład. Wyznaczyć przybliżenie liczby $A = 2.02^3 + \ln(3.01^2 - 8)$

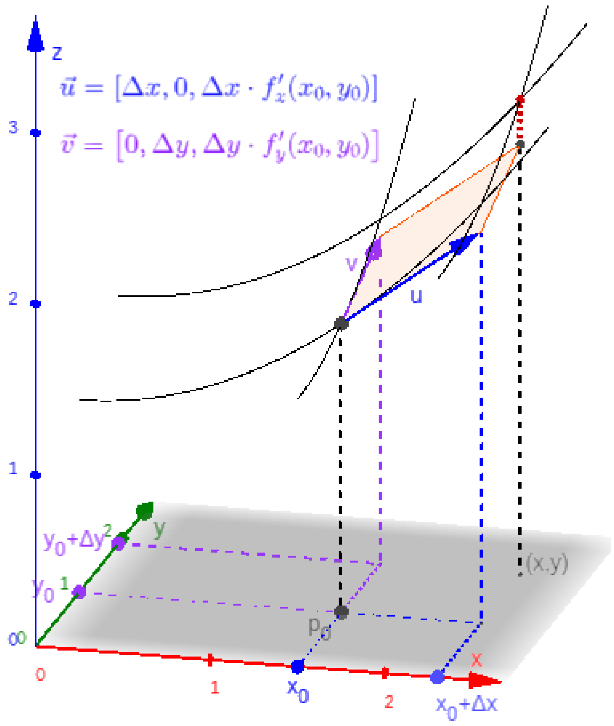
* * *

Ilustracje do

Tw. (Taylora, rzędu 2) Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0,y_0)(x,y) \subset \mathbb{R}^2$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x},\hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + R_2,$$

gdzie $R_2 = \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(\hat{x},\hat{y})\cdot(x-x_0)^2 + 2f''_{yx}(\hat{x},\hat{y})\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + f''_{yy}(\hat{x},\hat{y})\cdot(y-y_0)^2\right)$.



Pytania kontrolne.

(i) Czym jest Δx (z rysunku) w sformułowaniu twierdzenia?

(i) Jakiego koloru jest odcinek o długości R_2?

Tw. (Taylora, rzędu 3) Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^{\cdots}$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0,y_0)(x,y) \subset \mathbb{R}^{\cdots}$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x},\hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}\Delta x^2 + 2f''_{yx}\Delta x\Delta y + f''_{yy}\Delta y^2\right) + R_3,$$

gdzie $\Delta x =$ ...... , $\Delta y =$ i

$$R_3 = \tfrac{1}{3!}\left(f'''_{xxx}\Delta x^3 + \ \dots\ f'''_{yxx}\Delta x^2\Delta y + \ \dots\ f'''_{yyx}\Delta x\Delta y^2 + f'''_{yyy}\Delta y^3\right),$$

gdzie pochodne cząstkowe rzędu trzeciego są liczone w $(\hat{x},\hat{y})$, a pozostałe w (x_0,y_0).

Dowód. (szkic)

Określamy funkcję JEDNEJ zmiennej $F(t) = f(x_0 + t\cdot\Delta x, y_0 + t\cdot\Delta y)$, dla $t \in [0,1]$.

Z tw. Taylora dla funkcji jednej zmiennej wynika istnienie $\hat{t} \in (0,1)$ takiego, że

$$F(1) = F(0) + F'(0)\cdot(1-0) + \tfrac{1}{2!}\cdot F''(0)\cdot(1-0)^2 + \tfrac{1}{3!}\cdot F'''(\hat{t})\cdot(1-0)^3, \qquad (*)$$

czyli

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \tfrac{1}{2!}\cdot F''(0) + \tfrac{1}{3!}\cdot F'''(\hat{t}).$$

Dalej wystarczy wyznaczyć (z reguły ....) wartości pochodnych:

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\ \dots\dots\ + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\ \dots\dots\ = f'_x\cdot\ \dots\dots\ + f'_y\cdot\ \dots\dots\ .$$

$$\begin{aligned}
F''(t) &= \frac{\partial\left(f'_x\cdot\Delta x + f'_y\cdot\Delta y\right)}{\partial t} = \frac{\partial f'_x}{\partial t}\cdot\Delta x + \frac{\partial f'_y}{\partial t}\cdot\Delta y = \\
&= \left(\frac{\partial f'_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f'_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\Delta x + \left(\frac{\partial f'_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f'_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\Delta y = \\
&= \left(f''_{xx}\cdot\Delta x + f''_{yx}\cdot\ \dots\dots\ \right)\cdot\Delta x + \left(f''_{xy}\cdot\Delta x + f''_{yy}\cdot\ \dots\dots\ \right)\cdot\Delta y = \\
&= f''_{xx}\cdot(\Delta x)^2 + 2\cdot f''_{yx}\cdot\Delta x\cdot\Delta y + f''_{yy}\cdot(\Delta y)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'''(t) &= \frac{\partial f''_{xx}}{\partial t}\cdot(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial f''_{yx}}{\partial t}\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \frac{\partial f''_{yy}}{\partial t}\cdot(\Delta y)^2 = \\
&= \left(\tfrac{\partial f''_{xx}}{\partial x}\cdot\tfrac{\partial x}{\partial t} + \tfrac{\partial f''_{xx}}{\partial y}\cdot\tfrac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot(\Delta x)^2 + 2\left(\tfrac{\partial f''_{yx}}{\partial x}\cdot\tfrac{\partial x}{\partial t} + \tfrac{\partial f''_{yx}}{\partial y}\cdot\tfrac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\Delta x\Delta y + (\ \dots\dots\dots\dots\ )\cdot(\dots)^2 \\
&= f'''_{xxx}\cdot(\Delta x)^3 + \ \dots\dots\dots\dots\ + \ \dots\dots\dots\dots\ + \ \dots\dots\dots\dots\ .
\end{aligned}$$

Wstawiając powyższe do wzoru (*) i przyjmując $\hat{x} = x_0 + \ \dots\ \cdot\Delta x$, $\hat{y} = \ \dots\ + \ \dots\ \cdot\ \dots$, mamy tezę. □

Tw. (Taylora, rzędu n) Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^{\cdots}$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0,y_0)(x,y) \subset \mathbb{R}^{\cdots}$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x},\hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial y^i \, \partial x^{k-i}} \cdot (y-y_0)^i (x-x_0)^{k-i} \right),$$

gdzie pochodne cząstkowe rzędu n są liczone w $(\hat{x},\hat{y})$, a pozostałe w (x_0,y_0).

Uwaga. Prawa strona wzoru, pomijając składniki przy $k = n$, jest wielomianem zmiennych x i y; nazwijmy go $w(x,y)$. Jest to wielomian stopnia .... Ma on wiele wspólnego z funkcją f w punkcie (x_0,y_0). CO ma wspólne?

Odp. Wspólne są: wartość i wartości wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu $\leq n-1$ (w punkcie (x_0,y_0)).

Uwaga. Napis: $f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial y^i \, \partial x^{k-i}} \cdot (y-y_0)^i (x-x_0)^{k-i} \right)$ nazywamy szeregiem Taylora funkcji f w punkcie (x_0,y_0). Oczywiście ma on sens jedynie dla funkcji, która ma pochodne cząstkowe wszystkich rzędów.

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, można pytać:

— Kiedy szereg Taylora jest zbieżny? (dla jakich punktów (x,y)?)

— Jeśli jest zbieżny dla pewnego (x,y), to czy jego suma jest równa $f(x,y)$?

— Jeśli jest zbieżny dla pewnego (x,y), to 'jak szybko' jest zbieżny?

Okazuje się, że w pewnym sensie 'ciekawsze' odpowiedzi są w przypadku, gdy przejdziemy do 'świata liczb zespolonych' utożsamiając pary (x,y) z liczbami $x+iy$ i rozważając funkcje z $\mathbb{C}$ o wartościach w $\mathbb{C}$. Tu zaczyna się ANALIZA ZESPOLONA, o której... nie powiem już ani słowa więcej.

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest dla funkcji DWÓCH zmiennych.
Odgadnij sformułowanie tw. Taylora rzędu 4 dla funkcji $f(x,y,z)$ trzech zmiennych.