# Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 6b

## Wartość największa (wartość najmniejsza) funkcji

Dla niektórych f-cji $f\!:\!D\!\to\!\mathbb{R}$ istnieje $p_g\!\in\!D$ takie, że $f(p)\!\le\!f(p_g)$, dla każdego $p\!\in\!D$.

Mówimy wtedy, że $f(p_g)$ jest wartością największą $f$, że $f$ osiąga swój kres górny.

Analogicznie, $f$ osiąga wartość najmniejszą w punkcie $p_d$, gdy ('znaczkami'):

$$\underset{p\in D}{\forall}\; f(p_d)\le f(p).$$

To samo innymi 'znaczkami':

$$f(p_d)=\inf f[D]=\inf\{f(p):p\!\in\!D\}=\inf_{p\in D}f(p)=\inf_D f=\inf f.$$

Uwaga. Nie dla każdej funkcji istnieje wartość największa, ale kres górny wartości istnieje zawsze (może być równy $+\infty$), jak zobaczymy w poniższych przykładach:

• Dla $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, której dziedziną jest $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mamy:

$\inf\limits_D f=0$ i $f$ nie ma wartości najmniejszej, bo $0<f(x,y)$ i $f(n,0)=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$,

$\sup\limits_D f\!=\!+\infty$ (bo $f(\frac{1}{n},0)\!=\!n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$) i oczywiście $f$ nie ma wartości największej.

• Dziedziną funkcji $f(x,y)=2^{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ jest koło $K=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$. Oczywiście $f(x,y)\le 2^{\sqrt{1-0^2-0^2}}=2^1=f(0,0)$, zatem 2 jest wartością największą.
Kres górny: $\sup f=2$ i jest on przyjęty tylko w punkcie $(0,0)$.
Kres dolny: $\inf f=2^0=1$ jest osiągany w każdym punkcie brzegu $K$ (na okręgu).

• Dla $f(x,y)=xy$ na $(0,1]^2$ oczywięcie mamy: $0<f(x,y)=xy\le 1\cdot 1=f(1,1)$, zatem $\sup\limits_{(0,1]^2} f=1$ i jest on przyjęty tylko w punkcie $(1,1)$. Natomiast $\inf\limits_{(0,1]^2} f=0$ (bo $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$) nie jest osiągnięty w żadnym punkcie $(0,1]^2$.

• Dla $f(x,y)=\arctan(1+x^2+y^2)$ mamy: $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f=\frac{\pi}{4}=f(0,0)$ oraz $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f=\frac{\pi}{2}$ (bo $f(n,0)=\arctan(1+n^2)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{\pi}{2}$) i nie jest osiągnięty w żadnym punkcie $\mathbb{R}^2$.

Twierdzenie Weierstrassa. (o osiąganiu [przyjmowaniu] kresów)
Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na zbiorze domkniętym i ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieją punkty $p_d, p_g \in D$ takie, że $f(p_d) \leq f(p) \leq f(p_g)$ dla każdego $p \in D$.

Dowód. Ograniczymy się do szukania takiego punktu $p_g$, że $f(p_g) = \sup f[D]$.
Oznaczmy $s := \sup f[D]$ . Dla wygody przyjmijmy, że $D \subset \mathbb{R}^2_+$.

Popatrzmy na kwadraty jednostkowe o wierzchołkach w punktach kratowych $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Wśród nich jest taki kwadrat $K_0$, że $\sup f[K_0 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo ............ ).
Niech $p_0 = (k_0, \ell_0)$ oznacza lewy dolny wierzchołek $K_0$, dla pewnych $k_0, \ell_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat $K_0$.
Wśród nich jest taki kwadrat $K_1$, że $\sup f[K_1 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo ............ ).
Niech $p_1 = (k_0{,}k_1\ ,\ \ell_0{,}\ell_1)$ oznacza lewy dolny wierzchołek $K_1$, dla pewnych cyfr $k_1, \ell_1$.

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat $K_1$.
Wśród nich jest taki kwadrat $K_2$, że $\sup f[K_2 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo ............ ).
Niech $p_2 = (k_0{,}k_1 k_2\ ,\ \ell_0{,}\ell_1\ell_2)$ oznacza lewy dolny wierzchołek $K_2$ ($k_2, \ell_2$ to cyfry).

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat $K_2$.
Wśród nich jest taki kwadrat $K_3$, że $\sup f[K_3 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo ............ ).
Niech $p_3 = (k_0{,}k_1 k_2 k_3\ ,\ \ell_0{,}\ell_1\ell_2\ell_3)$ oznacza lewy dolny wierzchołek $K_3$ ($k_3, \ell_3$ to cyfry).

... I tak dalej ...

Dostajemy nieskończony ciąg kwadratów $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ .
Ciąg $(p_n)$ ich lewych dolnych wierzchołków jest zbieżny do punktu

$$\hat{p} = (k_0{,}k_1 k_2 k_3 \ldots\ ,\ \ell_0{,}\ell_1\ell_2\ell_3 \ldots).$$

Ponieważ $\operatorname{diam} K_n = \frac{\sqrt{2}}{10^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, więc $\{\hat{p}\} = K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap \ldots$ .

Zauważmy, że $\hat{p} \in D$. Weźmy bowiem po punkcie $p'_n \in D \cap K_n$. Dostajemy ciąg $(p'_n)$ z $D$, zbieżny do ...... . Ponieważ $D$ jest ............ , więc $\hat{p} \in D$.

Ciągłość $f$ w $\hat{p}$ oznacza, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ istnieje $\delta_i > 0$ takie, że $|f(p) - f(\hat{p})| < \frac{1}{i}$, o ile $||p - \hat{p}|| < \delta_i$. Biorąc $n_i$ takie, że $\frac{\sqrt{2}}{10^{n_i}} < \delta_i$, mamy:

$$|f(p) - f(\hat{p})| < \tfrac{1}{i}, \text{ dla wszystkich } p \in K_{n_i} \cap D.$$

Stąd $\left| \sup_{K_{n_i} \cap D} f(p) - f(\hat{p}) \right| \leq \frac{1}{i}$, czyli $|s - f(\hat{p})| \leq \frac{1}{i}$.

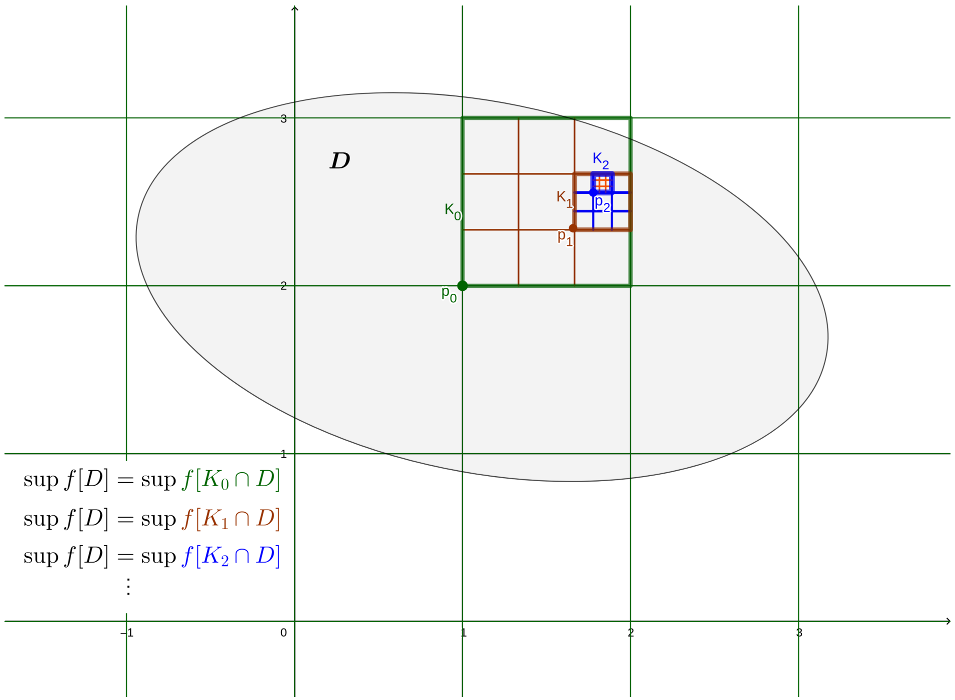
Ponieważ $\frac{1}{i}$ może być dowolnie małe, więc $|s - f(\hat{p})| = 0$, czyli $f(\hat{p}) = s = \sup f[D]$.
Zatem można przyjąć $p_g := \hat{p}$. $\square$

Uwaga. Dowód należy uzupełnić poniższymi zdaniami. W których miejscach?

(*) $\sup f[B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m] = \max\{\sup f[B_1], \sup f[B_2], \ldots, \sup f[B_m]\}$ ,

(**) ograniczoność $D$ zapewnia, że $D$ jest zawarte w <u>skończonej</u> sumie kwadratów.

Na poniższej ilustracji mamy podziały nie na 100, a na 9 mniejszych kwadratów.



Szukając wartości najmniejszej i wartości największej funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, twierdzenie Weierstrassa daje nam informację, że 'JEST CZEGO SZUKAĆ', o ile wiemy. że $f$ jest ciągła i określona na zbiorze domkniętym i ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^n$, czyli na zbiorze zwartym.

W przypadku $f : D \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$ we wnętrzu $D$ i gdy $D \subset \mathbb{R}^2$ jest zwarte możemy postępować następująco:

Szukamy punkty krytyczne, tzn. takie, w których $f$ <u>może</u> osiągać swe kresy:

**1$^o$** szukamy punkty krytyczne we wnętrzu $D$, czyli spełniające układ $\begin{cases} f'_x(p)=0 \\ f'_y(p)=0 \end{cases}$,

**2$^o$** szukamy punkty krytyczne na brzegu $D$ (co zazwyczaj sprowadzamy do badania pomocniczych funkcji jednej zmiennej),

**3$^o$** tw. Weierstrassa gwarantuje, że wartość najmniejszą i wartość największą znajdziemy wśród wartości $f$ w otrzymanych poprzednio punktach krytycznych. To zazwyczaj sprowadza się do porównania wartości funkcji w skończenie wielu punktach.

Uwaga. Punkty wnętrza $D$, w których $f$ nie ma pochodnych cząstkowych należy zaliczyć do punktów krytycznych.

Przykład. Niech $D = [-1, 1]^2$ i $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2xy + 1$.

**1$^o$.** Szukam p. kryt. we wnętrzu $D$, czyli w zbiorze $(-1, 1)^2$:

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, zatem we wnętrzu $D$ leży tylko $p_0 = (0, 0)$.

**2$^o$.** Szukam p. kryt. na brzegu $D$ :

**2$^o$a)** Szukam p. kryt. na odcinku $(-1, 1)(1, 1)$ :

Pomocnicza funkcja $a : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $a(x) = f(x,1) = 2x+1$ ma pochodną $a'(x) = 2 > 0$, więc $a$ rośnie na $[-1,1]$, stąd $f$ na tym odcinka ma punkty krytyczne tylko w końcach: $p_1 = (-1,1)$, $p_2 = (1,1)$.

**2$^o$b), c), d)** Szukam p. kryt. na pozostałych odcinkach z brzego $D$.

Postępując jak w 2$^o$a) widzimy, że jedyne punkty krytyczne to wierzchołki kwadratu, zatem dostajemy dwa nowe punkty krytyczne $p_3 = (-1, -1)$, $p_4 = (1, -1)$.

**3$^o$.** $D$ jest kwadratem, więc oczywiście jest domknięty i ograniczony, więc (z tw. W.) $f$ osiąga kresy na $D$, które znajdziemy porównując wartości jedynie w owych p. kryt.:

$f(0, 0) = 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1,\ f(-1, 1) = -1,\ f(1, 1) = 3,\ f(-1, -1) = 3,\ f(1, -1) = -1.$

Stąd ostatecznie:

Odp.: $\sup\limits_D f = 3 = f(1, 1) = f(-1, -1)$ oraz $\inf\limits_D f = -1 = f(-1, 1) = f(1, -1)$.

PRZYKŁAD. Dla $f(x,y)=2x^2y-x^3-y^2$ na trójkącie $T=\Delta(0,0)(1,0)(0,1)$ mamy:

**1$^o$.** Szukam p. kryt. we wnętrzu $T$:

$$\begin{cases} f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4xy-3x^2=0\\ 2x^2-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(4y-3x)=0\\ y=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \text{lub} \begin{cases}y=\frac{3}{4}x\\ y=x^2\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \text{lub} \begin{cases}x=\frac{3}{4}\\ y=\frac{9}{16}\end{cases}\right).$$

We wnętrzu $T$ nie leży żaden z tych punktów.

**2$^o$.** Szukam p. kryt. na brzegu $T$ :

**2$^o$ a)** Szukam p. kryt. na odcinku $(0,1)(1,0)$ :
Pomocnicza funkcja $a:[0,1]\to\mathbb{R}$, $a(x)=f(x,1-x)=2x^2(1-x)-x^3-(1-x)^2=-3x^3+x^2+2x-1$ ma pochodną $a'(x)=-9x^2+2x+2$, która na $[0,1]$ zeruje się tylko w $\frac{1+\sqrt{19}}{9}$, stąd dostajemy trzy punkty krytyczne: $p_1=\left(\frac{1+\sqrt{19}}{9}, 1-\frac{1+\sqrt{19}}{9}\right)$ i końce $p_2=(0,1)$, $p_3=(1,0)$.

**2$^o$ b)** Szukam p. kryt. na odcinku $(0,0)(1,0)$ :
F-cja $b:[0,1]\to\mathbb{R}$, $b(x)=f(x,0)=-x^3$ maleje na [0,1], stąd dostajemy tylko końce; $p_4=(0,0)$ (drugi już jest).

**2$^o$ c)** Szukam p. kryt. na odcinku $(0,0)(0,1)$ :
Funkcja $c:[0,1]\to\mathbb{R}$, $c(y)=f(0,y)=-y^2$ maleje na $[0,1]$, stąd dostajemy tylko końce (już są).

**3$^o$.** Oczywiście $T$ jest domknięty i ograniczony, więc (z tw. W.) $f$ osiąga kresy na $T$, które znajdziemy badając wartości $f$ w owych p. krytycznych:

$$f\left(\tfrac{1+\sqrt{19}}{9}, \tfrac{8-\sqrt{19}}{9}\right)=\frac{38\sqrt{19}-187}{243}, \quad f(1,0)=-1=f(0,1), \quad f(0,0)=0.$$

To nie koniec strasznych rachunków, trzeba ów koszmarek porównać z -1 i z 0:

Ponieważ $\frac{38\sqrt{19}-187}{243}>\frac{0-187}{243}>-1$ oraz $\frac{38\sqrt{19}-187}{243}<\frac{38\cdot 4{,}5-187}{243}=\frac{-16}{243}<0$,
więc ostatecznie:

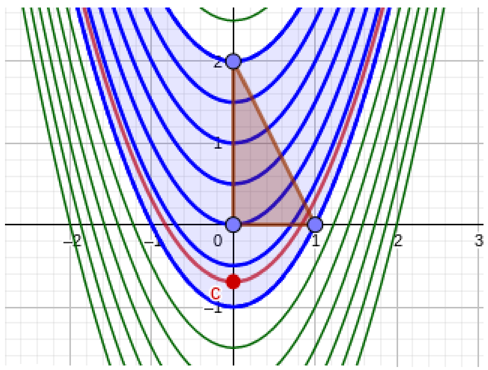
ODPOWIEDŹ: $\sup\limits_T f=0=f(0,0)$ oraz $\inf\limits_T f=-1=f(1,0)=f(0,1)$ .

PRZYKŁAD. Znajdź kres górny i kres dolny wartości funkcji $f(x,y)=2x^2y-x^4-y^2$ na zbiorze $T=\Delta(0,0)(1,0)(0,2)$ i wszystkie punkty, w których te kresy są osiągane.

Jest to znacznie trudniejszy przykład. Stosowanie powyższej procedury jest możliwe, ale żmudne. Można 'chytrze'.

Wsk. Zbadaj poziomice.

ODPOWIEDŹ: $\inf\limits_T f=-4=f(0,2)$ oraz $\sup\limits_T f=0=f(x,x^2)$, dla $0\le x\le\sqrt{3}-1$.




*Dla* $f(x,y)=2x^2y-x^4-y^2$
*znaleźć* $\sup f[T]$, $\inf f[T]$,
*gdzie* $T=\Delta(0,0)(1,0)(0,2)$.

*Wsk. gdy* $y=x^2+c$, *to* $f(x,y)=?$