Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 7a

Nie można zapomnieć, że w metodzie Lagrange'a są pewne założenia, w szczególności trzeba uważać na brak różniczkowalności (np. gdy jest wartość bezwzględna):

Przykład. A
Znajdź kresy $f(x, y) = |x^2 + y^2 - 2y| - 6y$ na zbiorze $W = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 9 \leq 0\}$.

Rozwiązanie. (najważniejszy jest tu plan)
Oczywiście f jest ciągła i W jest kołem, więc (z tw. W.) kresy $f|_W$ są przyjmowane.

Zauważmy, że $x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1$ jest równaniem okręgu S zawartego we wnętrzu W (patrz rys .).

Dalej szukamy p. kryt. w CZTERECH zbiorach:

a) w zbiorze $U := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$ (wnętrze koła),
tu $f|_U(x, y) = -(x^2 + y^2 - 2y) - 6y$:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ brak p. kryt., bo } (0, -2) \notin U$$

b) w zbiorze $S := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$ (okrąg),
tu $f|_S(x, y) = (0) - 6y = \bar{f}(x, y)$ i stosujemy metodę Lagrange'a

$$\begin{cases} \bar{f}'_x = \lambda \cdot 2x \\ \bar{f}'_y = \lambda \cdot 2(y - 1) \\ x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x \\ -6 = \lambda \cdot 2(y - 1) \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \ \ldots\ldots \\ y = \ \ldots\ldots \end{cases},$$

i dostajemy: $p_1 = (..., ...)$, $p_2 = (..., ...)$.

c) w zbiorze $V := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 > 1,\ x^2 + y^2 < 9\}$ (wnętrze 'pierścienia'),
tu $f|_V(x, y) = (x^2 + y^2 - 2y) - 6y$:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \ldots \end{cases} \text{ brak p. kryt., bo } (0, \ldots) \notin V$$

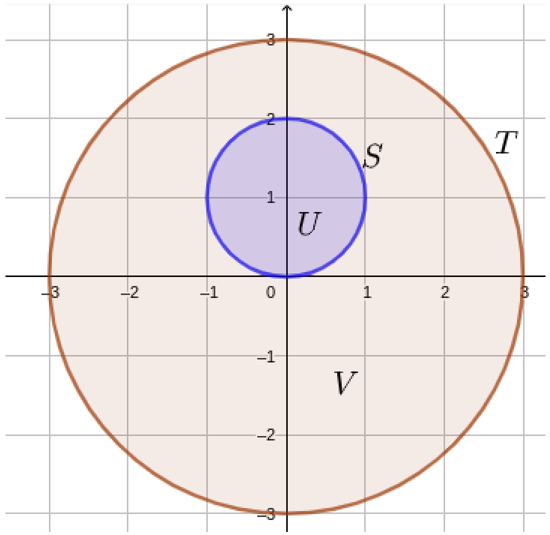
d) w zbiorze $T := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$ (okrąg),
tu $f|_T(x, y) = (x^2 + y^2 - 2y) - 6y = (9 - 2y) - 6y = \hat{f}(x, y)$ i stosujemy met. L.:

$$\begin{cases} \hat{f}'_x = \lambda \cdot 2x \\ \hat{f}'_y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x \\ -8 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \ \ldots\ldots \\ y = \ \ldots\ldots \end{cases},$$

i dostajemy: $p_3 = (..., ...)$, $p_4 = (..., ...)$.

Podsumowując: $f(p_1) = \ \ldots\ ,\ f(p_2) = \ \ldots\ ,\ f(p_3) = \ \ldots\ ,\ f(p_4) = \ \ldots\ ,$
stąd $\sup f[W] = \ \ldots\ = f(\ \ldots\ldots\ ),\ \inf f[W] = \ \ldots\ = f(\ \ldots\ldots\ )$.

Uwaga. W b) i d) można 'chytrze' (bez mnożników Lagrange'a).



Twierdzenie. (metoda mnożników Lagrange'a)
Niech funkcje $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ będą klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^m$, niech $g(p_0) = 0$, $h(p_0) = 0$ oraz $f|_{g=0 \wedge h=0}$ ma w p_0 ekstremum lokalne lub globalne. Wtedy wektory $\nabla f(p_0)$, $\nabla g(p_0)$, $\nabla h(p_0)$ są liniowo zależne.

W szczególności gdy $\nabla g(p_0), \nabla h(p_0) \neq \vec{0}$, to istnieją $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takie, że
$$\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0) + \mu \cdot \nabla h(p_0).$$

Wniosek. Niech $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mają wszędzie ciągłe gradienty i $\nabla g, \nabla h \neq \vec{0}$. Wtedy $f|_{g=0 \wedge h=0}$ może mieć ekstrema tylko w punktach (x, y, z) spełniających układ:

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \lambda \cdot g'_x(x,y,z) + \mu \cdot h'_x(x,y,z) \\ f'_y(x,y,z) = \lambda \cdot g'_y(x,y,z) + \mu \cdot h'_y(x,y,z) \\ f'_z(x,y,z) = \lambda \cdot g'_z(x,y,z) + \mu \cdot h'_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Zad.B. Znaleźć kresy $f(x, y, z) = y + z$ przy warunkach $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 4$.

Niech $g(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$, $h(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4$ i $W = \{p : g(p) = 0 \text{ i } h(p) = 0\}$.

Jeśli $g(x, y, z) = 0$, to $|x| \leq 1$ i $|z| \leq 1$. Jeśli $h(x, y, z) = 0$, to $|y| \leq 2$ i $|z| \leq 2$.

Zatem punkty spełniające OBA warunki leżą w $[-1, 1] \times [-2, 2] \times [-1, 1]$, czyli W jest zbiorem ograniczonym. Jest też domknięty, więc z tw. W. wynika, że $f|_W$ osiąga swe kresy; wystarczy więc z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x + \mu \cdot h'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y + \mu \cdot h'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z + \mu \cdot h'_z \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2y \\ 1 = \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 2z \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ \\ \\ 0^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + 1 = 4 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = 0 \\ 1 = \mu \cdot 2y \\ 1 = \mu \cdot 2z \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \right)$$

W drugim układzie $\mu \neq 0$ (dlaczego?), skąd $y = z$. Stąd z ostatniego równania $y^2 = z^2 = 2$, co prowadzi do sprzeczności w przedostatnim: $x^2 + 2 = 1$.

Zatem punkty krytyczne dostajemy tylko z pierwszego układu:
$p_1 = (0, \sqrt{3}, 1)$, $p_2 = (0, -\sqrt{3}, 1)$, $p_3 = (0, \sqrt{3}, -1)$, $p_4 = (0, -\sqrt{3}, -1)$.

Badając sumy $y + z$ dostajemy

Odpowiedź: $\sup\limits_W f = \sqrt{3} + 1 = f(p_1)$, $\inf\limits_W f = -\sqrt{3} - 1 = f(p_4)$.

Zad.G. Znaleźć kresy $f(x,y,z)=y^3+xz^2$ przy warunkach $x^2+y^2+z^2=1$, $x=y$.
.

Zauważmy, że zbiór $W=\{(x,y,z): x-y=0,\ x^2+y^2+z^2-1=0\}$ jest ....
czyli W jest zbiorem ....
Jest też domknięty, więc z tw. W. wynika, że $f|_W$ osiąga swe kresy.
Zatem wystarczy (z tw. Lagrange'a) zbadać (porównać wartości f) w rozwiązaniach układu:

$$\begin{cases} z^2=\lambda\cdot 2x+\mu\cdot 1 \\ 3y^2=\lambda\cdot 2y+\mu\cdot(-1) \\ 2xz=\lambda\cdot 2z+\mu\cdot 0 \\ x-y=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases} \underset{III r.}{\Longrightarrow} \left(\begin{cases} \\ \\ z=0 \\ x=y \\ 2y^2+0^2=1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z^2=x\cdot 2x+\mu \\ 3y^2=x\cdot 2y-\mu \\ \lambda=x \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases} \right) \underset{I+II}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{I+II}{\Longrightarrow} \left(\begin{cases} z=0 \\ x=y \\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z^2+3y^2=2x^2+2xy \\ \ldots\ldots \\ x=y \\ \ldots\ldots \end{cases} \right) \Longrightarrow \left(\begin{cases} z=0 \\ x=y \\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z^2=x^2 \\ x=y \\ 3x^2=1 \end{cases} \right)$$

Czyli mamy 6 p. kryt. w których:

$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}},\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$,

$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}},\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Ponieważ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}<\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, (bo $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}<\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \iff \sqrt{\frac{1}{8}}<\sqrt{\frac{4}{27}} \iff 27<32$), więc

$\sup\limits_W f=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=f\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}},\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$,

$\inf\limits_W f=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}},\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.