Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 8a $\iint\limits_P f,\ \iiint\limits_V f$

Co to jest całka podwójna [potrójna]?

Przykład 1. $\iint\limits_P f$, gdzie $f(x,y) = [x-y]$ i P jest trapezem $(2,0)(4,0)(4,4)(2,2)$.

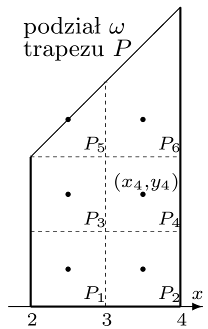
Zbiór $P = [2,4]\times[0,4]\cap\{(x,y) : y \le x\}$ można podzielić na skończenie wiele zbiorów o rozłącznych wnętrzach. (Można to zrobić na wiele sposobów.)

Rozważmy podział $\omega = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$, gdzie

$P_1 = [2,3]\times[0,1]$, $P_2 = [...,4]\times[...,...]$,

$P_3 = [2,3]\times[...,...]$, $P_4 = [...,...]\times[1,2]$,

$P_5 = [2,3]\times[2,3]\cap P$, $P_6 = [3,4]\times[2,4]\cap P$.



Pola tych zbiorów są równe: $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3 = \Delta p_4 = 1$, $\Delta p_5 = 0.5, \Delta p_6 = ...$. Oczywiście pole $P = \sum_i \Delta p_i$.

W każdym zbiorze P_i wybierzmy po (jednym) punkcie (x_i, y_i); np. $(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{3}{2})$, $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{5}{2})$.

Dla funkcji $f(x,y) = [x-y]$, podziału ω z wybranymi punktami (x_i,y_i), obliczamy:

$$\sigma_\omega := \sum_{i=1}^{6} f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i =$$
$$= [\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}]\cdot 1 + [\tfrac{\cdots}{2}-\tfrac{1}{2}]\cdot 1 + [\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}]\cdot 1 + [\tfrac{7}{2}-\tfrac{3}{2}]\cdot 1 + [\tfrac{5}{2}-\tfrac{5}{2}]\cdot\tfrac{1}{2} + [\tfrac{7}{2}-\tfrac{5}{2}]\cdot\tfrac{\cdots}{2} = 9\tfrac{1}{2}.$$

$$s_\omega := \sum_{i=1}^{\cdots}\big(\inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\ \cdot\Delta p_i\big) = 1\cdot 1 + ...\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot\tfrac{1}{2} + ...\cdot\tfrac{3}{2} = \ ...\ ,$$

$$S_\omega := \sum_{i=1}^{6}\big(\sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\ \cdot\Delta p_i\big) = 3\cdot 1 + ...\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot\tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{3}{2} = 15\tfrac{1}{2}\ .$$

Przy innym wyborze punktów (np. zmieniając tylko $(x_2,y_2) = (4,0)$) możemy dostać inną liczbę σ_ω (w tym przypadku $10\frac{1}{2}$) ale zawsze między liczbami s_ω i S_ω.

Obserwacja. $s_\omega \le \sigma_\omega \le S_\omega$ (całkiem ogólnie).

Terminologia:

s_ω — suma dolna,
S_ω — suma górna,
σ_ω — suma Riemanna

dla zadanej funkcji f, zbioru P, jego podziału ω i punktów z elementów podziału.

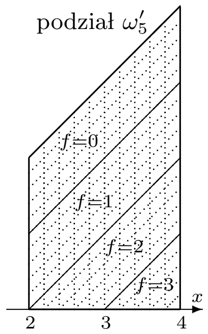
Intuicja: Gdy podział jest 'drobny', to owe trzy sumy są bliskie. Gdy owe podziały są 'coraz drobniejsze', to coraz lepiej przybliżają **jedną** liczbę; właśnie całkę $\iint\limits_P f\, d\omega$.

Przykład 1. c.d.

Dla tej funkcji $f(x,y)=[x-y]$ i trapezu P można rozważać 'wygodniejsze' podziały: mianowicie dla **ustalonej** liczby naturalnej n proste o równaniach postaci

$$y=x+\tfrac{k}{n}, \qquad x=\tfrac{k}{n}, \quad \text{gdzie } k\in\mathbb{Z},$$

dzielą P na równoległoboki i trójkąty (na rys. $n=5$) wyznaczając podział ω'_n.



Gdy wszystkie punkty (x_i,y_i) są wybrane z **wnętrz** P_i, to łatwo zliczamy (wskazówka: zsumuj pola takich P_i, że $f(x_i,y_i)=2$):

$$\sigma_{\omega'_n}=\sum_i f(x_i,y_i)\cdot\Delta p_i=3\cdot\tfrac12+2\cdot\tfrac32+1\cdot2+0\cdot2=6\tfrac12$$

Podobnie $\quad s_{\omega'_n}=\sum_i \inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i=6\tfrac12$.

Zaznacz te P_i, na których f nie jest stała. Widać wtedy, że

$$S_{\omega'_n}=\sum_i \sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i=$$
$$=6\tfrac12+1\cdot\tfrac{2}{n}+1\cdot\tfrac{2}{n}+1\cdot(\tfrac1n+\tfrac{1}{2n^2})+1\cdot\tfrac{1}{2n^2}=6\tfrac12+\tfrac5n+\tfrac{1}{n^2}.$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $\sigma_{\omega'_n}, s_{\omega'_n}, S_{\omega'_n}$ są niemal $6\frac12=\iint\limits_P f$.

Przykład 2. Dla $f(x,y)=\frac{y}{x}$ podziały ω''_n trapezu P prostymi $y=\frac{k}{n}x,\ k\in\mathbb{Z}$ dają:

$$s_{\omega''_n}=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{k-1}{n}\cdot\tfrac{6}{n}= \ .... \ =3-\tfrac1n, \qquad S_{\omega''_n}=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{k}{n}\cdot\tfrac{6}{n}= \ .... \ =3+\tfrac1n,$$

więc $\displaystyle\iint\limits_P \frac{y}{x}=3.$

Uwaga. Dla innych funkcji 'wygodne' są inne podziały P; np. dla $f(x,y)=(2x-y)^2$ – podział prostymi: $y=2x+\frac{\sqrt{\cdots}}{\sqrt{n}}$, $k\in\mathbb{Z}$.
Dla $f(x,y)=2x+y^3$ trudno o 'wygodny' podział; później zobaczymy jak rachunek całkowy 'załatwia' ten problem.

Przykład 3. $\iint\limits_P f$ gdzie $f(x,y)=x^2+y^2$ i P – koło o środku $(0,0)$ i promieniu R.

Dla ustalonego n dzielimy koło na n pierścieni; tworzymy podział $\omega_n=\{P_1,\ldots,P_n\}$: dla $1\le k\le n$, niech $\quad P_k=\{(x,y): R\sqrt{\frac{k-1}{n}}\le\sqrt{x^2+y^2}\le R\sqrt{\frac{k}{n}}\}$ (zrób rysunek).

Ich pola są równe $\ \Delta p_k=\pi(R\sqrt{\frac{k}{n}})^2-\pi(R\sqrt{\frac{k-1}{n}})^2=\ldots=\frac1n\pi R^2$, skąd

$$s_{\omega_n}=\sum_{k=1}^{n}R^2\tfrac{k-1}{n}\cdot\tfrac{\pi R^2}{n}=\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac12\pi R^4\ , \qquad S_{\omega_n}=\sum_{k=1}^{n}R^2\tfrac{k}{n}\cdot\tfrac{\pi R^2}{n}=\tfrac{n+1}{n}\cdot\tfrac12\pi R^4\ .$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $s_{\omega_n}, S_{\omega_n}$ są niemal równe $\frac12\pi R^4=\displaystyle\iint\limits_{||(x,y)||\le R} x^2+y^2$.

DEFINICJA. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ograniczoną na zbiorze ograniczonym P. Dla podziału $\omega = \{P_1, \dots P_m\}$ zbioru P na zbiory o rozłącznych wnętrzach i przy wyborze z nich punktów $(x_1,y_1), \dots, (x_m,y_m)$ przyjmujemy oznaczenia:

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i)\cdot \Delta p_i,\ s_\omega = \sum_{i=1}^{m} \inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot \Delta p_i,\ S_\omega = \sum_{i=1}^{m} \sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot \Delta p_i,$$

gdzie Δp_i = pole zbioru P_i.
Rozważając **wszystkie** podziały określamy:

$$\underline{\iint_P} f := \sup_\omega s_\omega \text{ – całka dolna}, \quad \overline{\iint_P f} := \inf_\omega S_\omega \text{ – całka górna}.$$

Gdy są równe, to tę liczbę nazywamy całką f na zbiorze P i piszemy $\iint\limits_P f$.

Innymi 'znaczkami':

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i)\cdot \Delta p_i, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^{m} \inf_{P_i} f \cdot \Delta p_i, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^{m} \sup_{P_i} f \cdot \Delta p_i$$

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i)\cdot |P_i|, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^{m} \inf f[P_i] \cdot |P_i|, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^{m} \sup f[P_i] \cdot |P_i|$$

OBSERWACJA. Niech ω', ω'' będą dwoma podziałami zbioru P.
Istnieje podział $\bar\omega$ będący ich wspólnym rozdrobnieniem

i zachodzą nierówności:

$$s_{\omega'} \ \dots\dots\ s_{\bar\omega} \ \dots\dots\ S_{\bar\omega} \ \dots\dots\ S_{\omega'} \ ,$$

$$s_{\omega''} \ \dots\dots\ s_{\bar\omega} \ \dots\dots\ S_{\bar\omega} \ \dots\dots\ S_{\omega''} \ .$$

$$s_{\omega'} \ \dots\dots\dots\dots\ S_{\omega''} \ .$$

Dla $\omega' = \{P_1', \dots, P_i', \dots, P_{m'}'\}$ i $\omega'' = \{P_1'', \dots, P_j'', \dots, P_{m''}''\}$ owe wspólne rozdrobnienie $\bar\omega$ jest złożone ze wszystkich przekrojów $P_i' \cap P_j''$ o niepustych wnętrzach, (zrób rysunek).

Zatem

OBSERWACJA. Dla dowolnych podziałów ω', ω'' mamy: $s_{\omega'} \le \underline{\iint\limits_P} f \ \le \ \overline{\iint\limits_P f} \le S_{\omega''}$.

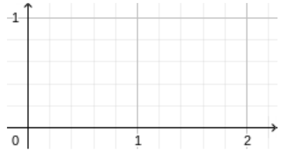
PRZYKŁAD 4. Są funkcje, dla których całka nie istnieje, np. dla funkcji $f(x,y)=0$ gdy $x\in\mathbb{Q}$ i $f(x,y)=1$ gdy $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dla zbioru $P=[1,3]\times[1,3]$ i dowolnego podziału ω jest: $s_\omega = \sum\limits_{i=1}^{m} 0\cdot\Delta p_i = 0$, $S_\omega = \sum\limits_{i=1}^{m} 1\cdot\Delta p_i = 4$, więc $\underline{\iint\limits_P} f = 0 \ne 4 = \overline{\iint\limits_P f}$.

Przykłady 5.

Niech $P = [0,2]\times[0,1]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ niech ω_n oznacza podział P na $2\cdot n^2$ przystających kwadratów.

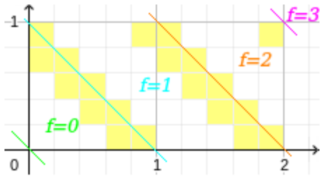
$f_1(x,y) = [x]$ jest całkowalna na P, bo dla podziałów ω_n mamy:

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

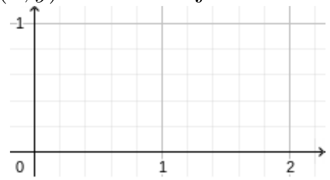


$f_2(x,y) = [x+y]$ na P jest całkowalna, bo dla tych podziałów

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \tfrac{2n-1}{n^2}\cdot(1-0) + \tfrac{2n}{n^2}\cdot(2-1) + \tfrac{1}{n^2}\cdot(3-2) = \tfrac{4}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$



$f_3(x,y) = x^5$ na P jest całkowalna, bo dla tych podziałów: $S_{\omega_n} - s_{\omega_n} =$ ....



$f_4(x,y) = \{x\}$ na P jest całkowalna, bo dla tych podziałów: $S_{\omega_n} - s_{\omega_n} =$ ....

$f_5(x,y) = xy$ na P jest całkowalna, bo dla tych podziałów: $S_{\omega_n} - s_{\omega_n} =$ ....

Spostrzeżenia.

- $S_\omega - s_\omega = \left(\sum_i \sup_{P_i} f\cdot|P_i|\right) - \left(\sum_i \inf_{P_i} f\cdot|P_i|\right) = \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f)\cdot|P_i|.$
- Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole $|P_i| = p$,
  to $\quad S_\omega - s_\omega = p\cdot\sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f).$
- Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica $\sup_{P_i} - \inf_{P_i} = c$,
  to $\quad S_\omega - s_\omega = c\cdot\sum_i |P_i| = c\cdot|P|.$