

ANALIZA MATEMATYCZNA A3, 9.X za żmudne dodatki biegunowe/polarne

(ZA) DUŻO POLARNYCH ĆWICZEŃ Celem jest zad. 99. Pod nim jest rozgrzewka.

99. ZADANIE DODATKOWE. Zapisz całkę $\iint_S f(x, y) d\omega$ jako całkę iterowaną (lub sumę całek iterowanych) w układzie biegunowym i kartezjańskim, gdy:

a) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \pi \wedge x, y < 0\}$ b) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x < |y|\}$

c) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x \wedge x < |y|\}$ d) $S = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4x\}$

e) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x, x > |y|\}$ f) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x, x^2 + y^2 \leq 4\}$

g) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4x \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$

h) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |x| < 1\}$ i) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |x| > 1\}$

j) $S = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 9, |y| < 2\}$ k) $S = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 9, |x| > 2\}$

l) $S = \{(x, y) : 4 < x^2 + y^2 \leq 9, |y| < 2\}$ ł) $S = \{(x, y) : 4 < x^2 + y^2 \leq 9, |y| < 1\}$

n) $S = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 2y\}$ ñ) $S = [0, 1]^2$

o) $S = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \geq 2x\}$ ó) $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 4\}$

p) $S = \{(x, y) : 4 < x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y < \sqrt{3}|x|\}$

* * *

1. Znajdź współrzędne kartezjańskie punktu o podanych współrzędnych biegunowych

a) $(3, \pi/4)$ b) $(2, -\pi/6)$ c) $(3, 7\pi/3)$ d) $(5, 0)$ e) $(2, \pi/2)$ f) $(\pi/2, 2)$

g) $(-2, \pi/2)$ h) $(1, 3\pi/2)$ i) $(3, -5\pi/6)$ j) $(1, 1)$ k) $(-1, 1)$ l) (e^2, π)

1^{-1} . Znajdź współrzędne biegunowe punktu o podanych współrz. kartezjańskich.

a) $(3, 3)$ b) $(4, -4)$ c) $(0, 5)$ d) $(-4, 0)$ e) $(3, 3\sqrt{3})$ f) $(-1/3, \sqrt{3}/3)$

g) $(-3, \sqrt{3})$ h) $(-2\sqrt{3}, 2)$ i) $(0, 0)$ j) $(-5\sqrt{3}, -5)$ k*) (r, φ)

2. Zapisz równanie we współrzędnych biegunowych w postaci $r = f(\varphi)$

a) $2x + 3y = 4$ b) $y^2 = 4x$ c) $x^2 + 9y^2 = 1$ d) $9x^2 + y^2 = 4y$

e) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ f) $x^2 + y^2 = 2x$ g) $x^2 + y^2 = 4y$ h) $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$

2^{-1} . Zapisz równanie we współrzędnych kartezjańskich

a) $r = 5$ b) $r = 3 \cos \varphi$ c) $\operatorname{tg} \varphi = 6$ d) $\operatorname{ctg} \varphi = 3$

e) $r \cos \varphi = 3$ f) $r = \sin 2\varphi$ g) $r = 2 \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi$

3. Które pary równań opisują ten sam zbiór?

a) $r = 1 + \cos \varphi, \quad r^2 = r + r \cos \varphi$ b) $r = 2 + \cos \varphi, \quad r^2 = 2r + r \cos \varphi$

4. Naszkiuj zbiór opisany we współrzędnych biegunowych (czasami warto przejść do współrzędnych kartezjańskich)

a) $r = 5$ b) $r = -2$ c) $r = 0$ d) $\varphi = 3\frac{\pi}{2}$ e) $\varphi = -\frac{7\pi}{6}$ f) $|\varphi| = \frac{\pi}{3}$

g) $r \sin \varphi = 5$ h) $r = 2 \sin \varphi$ i) $r = -3 \cos \frac{\varphi}{2}$ j) $r \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = 3$

k) $r \cos(\varphi + \frac{\pi}{4}) = -2$ l) $r(\sin \varphi + \cos \varphi) = 1$ m) $\frac{2}{r} = 3 \cos \varphi - 2 \sin \varphi$

n) $2 < r \leq 3$ o) $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$ p) $2 < r \leq 3 \vee \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$

q) $1 < r \leq 2 \wedge \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ r) $r \in (0, 1) \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ q) $1 < r \vee \varphi \in (0, \frac{\pi}{4}]$

4'. Jak w zad. 4 (tu trochę trudniejsze przykłady)

a) $r = 1 - \sin \varphi$ b) $r = 3(1 - \sin \varphi)$ c) $r = 5(1 + \sin \varphi)$

d) $r = 3 \sin 2\varphi$ e) $r = -4 \sin 3\varphi$ f) $r = -\sin 4\varphi$ g) $r = 2 \cos 6\varphi$

h) $r = \cos \frac{\varphi}{2}$ i) $r = \sin \frac{\varphi}{2}$ j) $r^2 = \sin \varphi$ k) $r^2 = 25 \cos \varphi$

l) $r^2 = 9 \sin 2\varphi$ m) $r = 1 + 2 \sin \varphi$ n) $r = \sin \varphi + \cos \varphi$

5. Które pary warunków opisują ten sam zbiór?

a) $r = 0, \quad |x| + |y| = 0$

b) $r = 1, \quad |x| + |y| = 1$

c) $r^2 < 4, \quad |x|^2 + |y|^2 < 4$

d) $r \in [0, 3) \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad |x|^2 + |y|^2 < 9 \wedge y \geq 0$

e) $xy = 0, \quad |2\varphi/\pi| \in \mathbb{Z}$

f) $y = x, \quad \varphi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$

g) $y = 2x, \quad \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$

h*) $r = 3(\cos \varphi + 1), \quad r = 3(\cos \varphi - 1)$

i*) $r = 2(\sin \varphi + 1), \quad r = 2(\sin \varphi - 1)$

6. Zapisz w układzie biegunowym

a) jakiś kwadrat (pełny) a') brzeg jakiegoś kwadratu

b) jakiś trójkąt (pełny) b') brzeg jakiegoś trójkąta