Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 1.

Parametryzacją linii (łuku, krzywej) $K \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy
funkcję $F : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, o dziedzinie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ taką, że $F[[a, b]] = K$.

Na przykład

$$F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2,\ F(t) = (3\cos|t|, 3\sin|t|)$$

jest parametryzacją półokręgu K o środku (... , ...) i promieniu ....
Tą parametryzację można notować inaczej:

$$x(t) = 3\cos|t|,\ y(t) = 3\sin|t|,\ t \in [-\pi, \pi]$$

lub

$$x = 3\cos|t|,\ y = 3\sin|t|,\ -\pi \le t \le \pi,$$

lub

$$x_t = 3\cos|t|,\ y_t = 3\sin|t|,\ -\pi \le t \le \pi.$$

Inną parametryzacją K jest:

$$x = 3\cos|t|,\ y = 3\sin|t|,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$$

Parametryzację linii K można interpretować jako opis ruchu punktu obiegającego całe K w czasie od a do b. W momencie t tego ruchu, prędkość $(x'(t), y'(t))$ jest wektorem stycznym do K w punkcie $(x(t), y(t))$, a szybkość jest długością tego wektora (o ile istnieją pochodne $x'(t), y'(t)$).
Długość linii K tylko w niektórych parametryzacjach jest równa drodze, jaką przebywa punkt ją opisujący.

1. Funkcja $F : [-1, 2] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F(t) = (t^2 + 1, 3t^2 + 4)$ przekształca punkty przedziału ...... na punkty płaszczyzny; np.: $F(-1) = (2, ...)$, $F(-0.5) =$ ... .

a) Czy p-kty $(3.25, 10.75), (1.09, 4.27), (2.69, 9.07)$ należą do zbioru wartości F?

b) Zbiorem wartości tej funkcji jest odcinek – jaki?

Uwaga. Mówimy też: $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 3t^2 + 4$, $-1 \leq t \leq 2$ jest jedną z możliwych *parametryzacji* tego odcinka, inną jest: $x = t^2 + 1$, $y = 3t^2 + 4$, $0 \leq t \leq 2$. Czym się różnią?

2. Zaznacz łuki i podaj ich długości:

a) $x = \cos t$, $y = \sin t + 1$, $t \in [0, \pi]$

b) $x = \sin t$, $y = \sin t + 1$, $t \in [0, \pi]$

c) $x = \cos(\sin t)$, $y = \sin(\sin t) + 1$, $t \in [0, \pi]$

Uwaga. Na ogół dlugość linii (łuku) nie jest równa długości wędrówki opisanej daną parametryzacją. Jak to jest w zad. 1 i 2?

3. Koło K_t o promieniu ...... toczy się BEZ poślizgu po osi .... Jego środek S_t ślizga się po prostej ....

Parametryzacja $x_t =$ ... $-$ ...... , $y_t = 1 -$ ...... , $t \in \mathbb{R}$ opisuje *cykloidę*, linię jaką wykreśla punkt $P_t = (x_t, y_t)$ nieruchomy względem toczącego się koła K_t, leżący na brzegu koła, który w chwili $t = 0$ jest w punkcie (... , ...).

a) Prędkość (wektor!) punktu P_t w chwili $t = \frac{2\pi}{3}$ jest równa .... ,
a w chwili $t = \frac{\pi}{2}$ jest równa ....

b) Największa jego szybkość (liczba!) jest dla $t =$ ....

c) Może się wydawać, że dla $t = 2\pi$ wektor prędkości gwałtownie zmienia kierunek, ale TAK NIE JEST,
bowiem
....
....

d) Środek M_0 promienia S_0P_0 koła K_0 wyznacza inną linię o parametryzacji:

$\hat{x}_t =$ .... , $\hat{y}_t =$ .... , $t \in \mathbb{R}$

e) Punkt $N_0 = 1{,}2 \cdot P_0 + (-0{,}2) \cdot S_0$ przedłużenia promienia S_0P_0 koła K_0 wyznacza ciekawą linię o parametryzacji:

$\bar{x}_t =$ .... , $\bar{y}_t =$ .... , $t \in \mathbb{R}$

Ciekawe jest to, że w chwili $t = 2\pi$ prędość punktu N_t, równa .... jest skierowana .... , co oznacza, że .... !