

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 10A $\iint_P f, \iiint_V f$

CO TO JEST CAŁKA PODWÓJNA [POTRÓJNA]?

PRZYKŁAD 1. $\iint_P f$, gdzie $f(x, y) = [x - y]$ i P jest trapezem $(2, 0)(4, 0)(4, 4)(2, 2)$.

Zbiór $P = [2, 4] \times [0, 4] \cap \{(x, y) : y \leq x\}$ można podzielić na skończenie wiele zbiorów o rozłącznych wnętrzach. (Można to zrobić na wiele sposobów.)

Rozważmy podział $\omega = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$, gdzie

$$P_1 = [2, 3] \times [0, 1], \quad P_2 = [\dots, 4] \times [\dots, \dots],$$

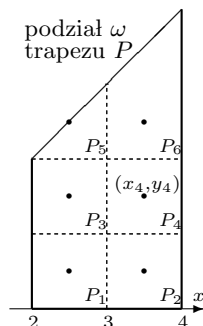
$$P_3 = [2, 3] \times [\dots, \dots], \quad P_4 = [\dots, \dots] \times [1, 2],$$

$$P_5 = [2, 3] \times [2, 3] \cap P, \quad P_6 = [3, 4] \times [2, 4] \cap P.$$

Pola tych zbiorów są równe: $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3 = \Delta p_4 = 1$,
 $\Delta p_5 = 0.5, \Delta p_6 = \dots$. Oczywiście pole $P = \sum_i \Delta p_i$.

W każdym zbiorze P_i wybierzmy po (jednym) punkcie (x_i, y_i) ;

np. $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{7}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}), (\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$.



Dla funkcji $f(x, y) = [x - y]$, podziału ω z wybranymi punktami (x_i, y_i) , obliczamy:

$$\begin{aligned} \sigma_\omega &:= \sum_{i=1}^6 f(x_i, y_i) \cdot \Delta p_i = \\ &= [\frac{5}{2} - \frac{1}{2}] \cdot 1 + [\frac{7}{2} - \frac{1}{2}] \cdot 1 + [\frac{5}{2} - \frac{3}{2}] \cdot 1 + [\frac{7}{2} - \frac{3}{2}] \cdot 1 + [\frac{5}{2} - \frac{5}{2}] \cdot \frac{1}{2} + [\frac{7}{2} - \frac{5}{2}] \cdot \frac{3}{2} = 9\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$s_\omega := \sum_{i=1}^6 \left(\inf_{(x,y) \in P_i} f(x, y) \cdot \Delta p_i \right) = 1 \cdot 1 + \dots \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + \dots \cdot \frac{3}{2} = \dots,$$

$$S_\omega := \sum_{i=1}^6 \left(\sup_{(x,y) \in P_i} f(x, y) \cdot \Delta p_i \right) = 3 \cdot 1 + \dots \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

Przy innym wyborze punktów (np. zmieniając tylko $(x_2, y_2) = (4, 0)$) możemy dostać inną liczbę σ_ω (w tym przypadku $10\frac{1}{2}$) ale zawsze między liczbami s_ω i S_ω .

OBSERWACJA. $s_\omega \leq \sigma_\omega \leq S_\omega$ (całkiem ogólnie).

TERMINOLOGIA:

s_ω — suma dolna,

S_ω — suma górna,

σ_ω — suma Riemanna

dla zadanej funkcji f , zbioru P , jego podziału ω i punktów z elementów podziału.

INTUICJA: Gdy podział jest 'drobny', to owe trzy sumy są bliskie. Gdy owe podziały są 'coraz drobniejsze', to coraz lepiej przybliżają **jedną** liczbę; właśnie całkę $\iint_P f d\omega$.

PRZYKŁAD 1. C.D.

Dla tej funkcji $f(x, y) = [x - y]$ i trapezu P można rozważać 'wygodniejsze' podziały: mianowicie dla **ustalonej** liczby naturalnej n proste o równaniach postaci

$$y = x + \frac{k}{n}, \quad x = \frac{k}{n}, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

dziela P na równoległoboki i trójkąty (na rys. $n = 5$) wyznaczając podział ω'_n .

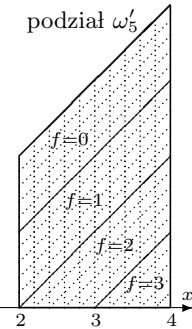
Gdy wszystkie punkty (x_i, y_i) są wybrane z **wnętrz** P_i , to łatwo zliczamy (wskazówka: zsumuj pola takich P_i , że $f(x_i, y_i) = 2$):

$$\sigma_{\omega'_n} = \sum_i f(x_i, y_i) \cdot \Delta p_i = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 6\frac{1}{2}$$

Podobnie $s_{\omega'_n} = \sum_i \inf_{(x,y) \in P_i} f(x, y) \cdot \Delta p_i = 6\frac{1}{2}$.

Zaznacz te P_i , na których f nie jest stała. Widać wtedy, że

$$\begin{aligned} S_{\omega'_n} &= \sum_i \sup_{(x,y) \in P_i} f(x, y) \cdot \Delta p_i = \\ &= 6\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{2}{n} + 1 \cdot \frac{2}{n} + 1 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2n^2} = 6\frac{1}{2} + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$



Zatem dla 'dużych' n wielkości $\sigma_{\omega'_n}, s_{\omega'_n}, S_{\omega'_n}$ są niemal $6\frac{1}{2} = \iint_P f$.

PRZYKŁAD 2. Dla $f(x, y) = \frac{y}{x}$ podziały ω''_n trapezu P prostymi $y = \frac{k}{n}x, k \in \mathbb{Z}$ dają:

$$s_{\omega''_n} = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \cdot \frac{6}{n} = \dots = 3 - \frac{1}{n}, \quad S_{\omega''_n} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{6}{n} = \dots = 3 + \frac{1}{n},$$

więc $\iint_P \frac{y}{x} = 3$.

UWAGA. Dla innych funkcji 'wygodne' są inne podziały P ; np. dla $f(x, y) = (2x - y)^2$ - podział prostymi: $y = 2x + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}, k \in \mathbb{Z}$.

Dla $f(x, y) = 2x + y^3$ trudno o 'wygodny' podział; później zobaczymy jak rachunek całkowy 'załatwia' ten problem.

PRZYKŁAD 3. $\iint_P f$ gdzie $f(x, y) = x^2 + y^2$ i P - koło o środku $(0, 0)$ i promieniu R .

Dla ustalonego n dzielimy koło na n pierścieni; tworzymy podział $\omega_n = \{P_1, \dots, P_n\}$:

dla $1 \leq k \leq n$, niech $P_k = \{(x, y) : R\sqrt{\frac{k-1}{n}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\sqrt{\frac{k}{n}}\}$ (zrób rysunek).

Ich pola są równe $\Delta p_k = \pi(R\sqrt{\frac{k}{n}})^2 - \pi(R\sqrt{\frac{k-1}{n}})^2 = \dots = \frac{1}{n}\pi R^2$, skąd

$$s_{\omega_n} = \sum_{k=1}^n R^2 \frac{k-1}{n} \cdot \frac{\pi R^2}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2}\pi R^4, \quad S_{\omega_n} = \sum_{k=1}^n R^2 \frac{k}{n} \cdot \frac{\pi R^2}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2}\pi R^4.$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $s_{\omega_n}, S_{\omega_n}$ są niemal równe $\frac{1}{2}\pi R^4 = \iint_{\|(x,y)\| \leq R} x^2 + y^2$.

DEFINICJA. Niech $f(x, y)$ będzie funkcją ograniczoną na zbiorze ograniczonym P . Dla podziału $\omega = \{P_1, \dots, P_m\}$ zbioru P na zbiory o rozłącznych wnętrzach i przy wyborze z nich punktów $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ przyjmujemy oznaczenia:

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) \cdot \Delta p_i, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^m \inf_{(x,y) \in P_i} f(x, y) \cdot \Delta p_i, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^m \sup_{(x,y) \in P_i} f(x, y) \cdot \Delta p_i,$$

gdzie Δp_i = pole zbioru P_i .

Rozważając **wszystkie** podziały określamy:

$$\underline{\int\int_P f} := \sup_\omega s_\omega - \text{całka dolna}, \quad \overline{\int\int_P f} := \inf_\omega S_\omega - \text{całka górna}.$$

Gdy są równe, to tą liczbę nazywamy całką f na zbiorze P i piszemy $\int\int_P f \, d\omega$,

a funkcję f nazywamy *całkowalną* na zbiorze P .

OBSERWACJA. Niech ω', ω'' będą dwoma podziałami zbioru P .

Istnieje podział $\bar{\omega}$ będący ich wspólnym rozdrobieniem

i zachodzą nierówności:

$$s_{\omega'} \dots s_{\bar{\omega}} \dots S_{\bar{\omega}} \dots S_{\omega'},$$

$$s_{\omega''} \dots s_{\bar{\omega}} \dots S_{\bar{\omega}} \dots S_{\omega''}.$$

$$s_{\omega'} \dots S_{\omega''}.$$

Zatem

OBSERWACJA. Dla dowolnych podziałów ω', ω'' mamy: $s_{\omega'} \leq \underline{\int\int_P f} \leq \overline{\int\int_P f} \leq S_{\omega''}$.

TWIERDZENIE. Funkcja jest całkowalna na P , gdy istnieje ciąg ω_n podziałów P taki, że ciąg różnic jej sum górnych i dolnych $S_{\omega_n} - s_{\omega_n}$ jest zbieżny do 0.

PRZYKŁAD 4. Są funkcje, dla których całka nie istnieje, np. dla funkcji $f(x, y) = 0$ gdy $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x, y) = 1$ gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dla zbioru $P = [1, 3] \times [1, 3]$ i dowolnego podziału ω jest: $s_\omega = \sum_{i=1}^m 0 \cdot \Delta p_i = 0$, $S_\omega = \sum_{i=1}^m 1 \cdot \Delta p_i = 4$, więc $\underline{\int\int_P f} = 0 \neq 4 = \overline{\int\int_P f}$.

Dokładniej: zbiory podziału P_1, \dots, P_m mają pola (są mierzalne w sensie Jordana) i przekroje $P_i \cap P_j$ mają zerowe pola (dla $i \neq j$).

Innymi 'znaczkami':

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) \cdot \Delta p_i, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^m \inf_{P_i} f \cdot \Delta p_i, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^m \sup_{P_i} f \cdot \Delta p_i$$

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) \cdot |P_i|, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^m \inf f[P_i] \cdot |P_i|, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^m \sup f[P_i] \cdot |P_i|$$

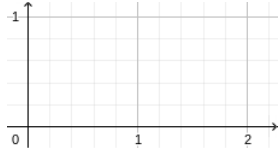
Dla $\omega' = \{P'_1, \dots, P'_i, \dots, P'_{m'}\}$ i $\omega'' = \{P''_1, \dots, P''_j, \dots, P''_{m''}\}$ owe wspólne rozdrobienie $\bar{\omega}$ jest złożone ze wszystkich przekrojów $P'_i \cap P''_j$ o niepustych wnętrzach, (zrób rysunek).

PRZYKŁADY 5.

Niech $P = [0, 2] \times [0, 1]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ niech ω_n oznacza podział P na $2 \cdot n^2$ przystających kwadratów.

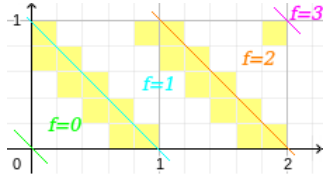
$f_1(x, y) = [x]$ jest całkowna na P , bo dla podziałów ω_n mamy:

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

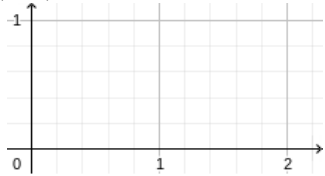


$f_2(x, y) = [x + y]$ na P jest całkowna, bo dla tych podziałów

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \frac{2n-1}{n^2} \cdot (1-0) + \frac{2n}{n^2} \cdot (2-1) + \frac{1}{n^2} \cdot (3-2) = \frac{4}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$



$f_3(x, y) = x^5$ na P jest całkowna, bo dla tych podziałów: $S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \dots$



SPOSTRZEŻENIA.

- $S_{\omega} - s_{\omega} = \left(\sum_i \sup_{P_i} f \cdot |P_i| \right) - \left(\sum_i \inf_{P_i} f \cdot |P_i| \right) = \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f) \cdot |P_i|.$
- Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole $|P_i| = p$,
to $S_{\omega} - s_{\omega} = p \cdot \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f).$
- Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica $\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f = c$,
to $S_{\omega} - s_{\omega} = c \cdot \sum_i |P_i| = c \cdot |P|.$