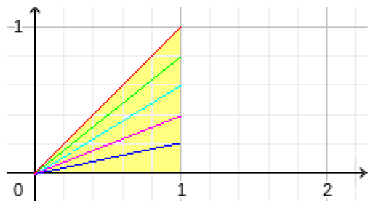
Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 10b $\iint\limits_P f$

Przykład 0. Niech $f(x,y)=x^2$, $P=\{(x,y): 0\le y\le x,\ x\in[0,1]\}$ i $n\in\mathbb{N}$.

a) Linie postaci $y=\frac{k}{n}\cdot x$, $k\in\mathbb{Z}$ wyznaczają podział ω_n' zbioru P, dla którego:



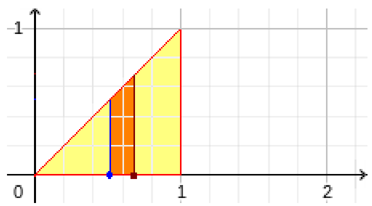
- $\sup f[P_i] =$ ...... dla każdego $P_i\in\omega_n'$
- $\inf f[P_i] =$ ...... dla każdego $P_i\in\omega_n'$

skąd

$s_{\omega_n'} =$ .... $\qquad S_{\omega_n'} =$ ....

i NIC z tego nie mamy; różnią się bardzo!

b) Linie postaci $x=\sqrt{\frac{k}{n}}$, $k\in\mathbb{Z}$ wyznaczają podział ω_n'' zbioru P, dla którego:



- pole $P_k =$ ...... dla każdego $P_k\in\omega_n''$

stąd

$s_{\omega_n''} =$ .... $\qquad S_{\omega_n''} =$ ....

skąd

$$\iint\limits_P x^2\,d\omega = \lim_{n\to\infty} S_{\omega_n''} = \ ......$$

* * *

Twierdzenie. Jeśli $f(x,y)$ jest ciągła na zwartym P, to jest całkowalna na P, tzn. $\underline{\iint\limits_P} f = \overline{\iint\limits_P} f$, całka dolna i górna są równe.

Ponadto, jeśli ω_n jest ciągiem coraz drobniejszych podziałów P, tzn. takim, że największe średnice ich elementów są zbieżne do 0, to

$$\lim_{n\to\infty} s_{\omega_n} = \lim_{n\to\infty}\sigma_{\omega_n} = \lim_{n\to\infty} S_{\omega_n} = \iint\limits_P f\ .$$

Powyższe twierdzenie pozwala łatwo dowodzić twierdzeń takich, jak poniższe:

Tw.

a) Jeśli .... , to $\iint\limits_P f(x,y)+g(x,y)\,d\omega =$ ....

b) Jeśli .... , to $\iint\limits_P \pi\cdot f(x,y)-e\cdot g(x,y)\,d\omega =$ ....

c) Jeśli .... , to $\iint\limits_{A\cup B} f(x,y)\,d\omega =$ ....

d) Jeśli $\forall_{x,y}\ f(x,y)=-f(-x,y)$, to $\iint\limits_{[-2,2]\times[-3,3]} f(x,y)\,d\omega =$ ....

e) Jeśli .... , to ....

Spostrzeżenia.

- $S_\omega - s_\omega = \left(\sum\limits_i \sup\limits_{P_i} f\cdot|P_i|\right) - \left(\sum\limits_i \inf\limits_{P_i} f\cdot|P_i|\right) = \sum\limits_i (\sup\limits_{P_i} f - \inf\limits_{P_i} f)\cdot|P_i|.$

- Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole $|P_i|=p$, to $\quad S_\omega - s_\omega = p\cdot\sum\limits_i (\sup\limits_{P_i} f - \inf\limits_{P_i} f).$

- Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica $\sup\limits_{P_i} - \inf\limits_{P_i} = c$, to $\quad S_\omega - s_\omega = c\cdot\sum\limits_i |P_i| = c\cdot|P|.$

TWIERDZENIE. (o zamianie całki podwójnej na iterowaną)
Niech $P = \{(x,y) : \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ x \in [a,b]\}$, gdzie $\varphi(x), \psi(x)$ są f-cjami ciągłymi takimi, że $\varphi(x) \le \psi(x)$ dla $x \in [a,b]$. Wtedy dla funkcji $f(x,y)$ ciągłej na P mamy

$$\iint_P f(x,y)\, d\omega = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right) dx\,.$$

Powyższe twierdzenie ma też wersję dualną. Uzupełnij założenia:

TWIERDZENIE. (o zamianie całki podwójnej na iterowaną)
Niech $Q = \{$ ......
......

$$\iint_Q f(x,y)\, d\omega = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y) dx \right) dy\,.$$

Teraz już można stosować rachunek całkowy:

PRZYKŁADY.

a) Niech T oznacza trójkąt o wierzchołkach: (0,0), (1,0), (2,0). Wtedy

$$\iint_T 3(x+y)^2\, d\omega = \int_0^1 \left(\int_{\dots}^{2x} 3(x+y)^2\, dy \right) dx = \int_0^1 \left((x+y)^3\right)_{\dots}^{2x}\, dx =$$
$$= \int_0^1 (x+2x)^3 - (x+ \dots)^3\, dx = \int_0^1 26x^3\, dx = 26 \cdot \tfrac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \tfrac{13}{2}.$$

Można też inaczej (zmieniając granice w całce iterowanej):

$$\iint_T 3(x+y)^2\, d\omega = \int_0^2 \left(\int_{y/2}^{1} 3(x+y)^2\, dx \right) dy = \int_0^2 \left((x+y)^3\right)_{y/2}^{1}\, dy = \dots\dots\dots = \tfrac{13}{2}. \quad \Box$$

b) Oblicz $\iint_P xy\, d\omega$, gdzie P ograniczają linie: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$.
Pierwiastek nieco niepokoi, zatem może wygodniej jest przedstawić to tak:

$$\iint_P xy\, d\omega = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{1} xy\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2 y\right)_{y^2}^{1}\, dy = \tfrac{1}{2}\int_0^1 y - y^5\, dy = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{1}{6}. \quad \Box$$

c) Oblicz $\iint_K y\, d\omega$, gdzie K jest kołem o środku $(3,0)$ i promieniu 3.

$$\iint_P y\, d\omega = \int_0^6 \left(\int_{-\sqrt{9-(x-3)^2}}^{+\sqrt{9-(x-3)^2}} y\, dy \right) dx = \int_0^6 \left(\tfrac{1}{2}y^2\right)_{-\sqrt{9-(x-3)^2}}^{+\sqrt{9-(x-3)^2}}\, dx =$$
$$= \int_0^6 \tfrac{1}{2}\Big((9-(x-3)^2) - (9-(x-3)^2)\Big)\, dx = \int_0^6 0\, dx = 0.$$

Zero?! Czy to można było 'przewidzieć'? Tak, por. Lista 2. $\Box$

d) Dla czworościanu C o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,6)$ mamy:

$$\iiint_C x^2\,d\omega = \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} \left(\int_0^{6-6x-2y} x^2\,dz \right) dy \right) dx = \qquad \left(\begin{array}{c}\text{w wewnętrznym nawiasie}\\ x^2 \text{ jest jak stała}\end{array}\right)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} x^2 \cdot (6-6x-2y)\,dy \right) dx = \qquad \left(\begin{array}{c}\text{zatem mnożymy } x^2\\ \text{przez długość przedziału}\end{array}\right)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} 6x^2 - 6x^3 - 2x^2y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(6x^2(3-3x) - 6x^3(3-3x) - x^2((3-3x)^2 - 0^2)\right) dx = \qquad \begin{array}{c}\text{żmudnie!}\\ \text{ale łatwo!}\end{array}$$

$$= 9\int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2\,dx = 9\cdot\left(\tfrac{1}{5}\cdot 1^5 - 2\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 + \tfrac{1}{3}\cdot 1^3\right) = \tfrac{3}{10} \qquad \text{(ufff!)}$$

Tą samą całkę potrójną można inaczej zamienić na całkę iterowaną, np.:

$$\iiint_C x^2\,d\omega = \int_0^6 \left(\int_0^{1-z/6} \left(\int_0^{3-3x-z/2} x^2\,dy \right) dx \right) dz = \ ...... \qquad \begin{array}{c}\text{nie ma co liczyć}\\ \text{wyjdzie tyle samo}\end{array}$$

Można jeszcze inaczej:

$$\iiint_C x^2\,d\omega = \int_{...}^3 \left(\int_{...}^{......} \left(\int_{...}^{......} x^2\,dz \right) dx \right) dy = \ ...... \quad \text{A jeszcze inaczej? Tak!} \qquad \square$$

e) Poniższa całka iterowana

$$\int_1^2 \left(\int_x^{2x} \left(\int_0^{x^2+y^2} x^2\,dz \right) dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_x^{2x} x^4 + x^2y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 x^4(2x-x) + \tfrac{1}{3}x^2(8x^3 - x^3)\,dx = \int_1^2 \tfrac{10}{3}x^5\,dx = \tfrac{10}{3\cdot 6}(2^6 - 1^6) = 35$$

jest równa całce potrójnej

$$\iiint_V x^2\,d\omega, \quad \text{gdzie} \quad V = \{(x,y,z) : x\in[1,2] \ \wedge\ x \le y \le \ ... \ \wedge\ 0 \le z \le \ ......\ \};$$

mówiąc 'prozą': V jest bryłą pod paraboloidą $z = x^2 +$ ...... leżącą nad trapezem o wierzchołkach $(1,1,0)$, $(2,2,0)$, $(2,...,0)$, $(1,...,...)$. $\square$