układ kartezjański		układ biegunowy
(x, y)	$\underset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{\longleftrightarrow}$	(r, φ)
$(1, 1)$	$\longleftrightarrow$	$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$
$(-3, 3)$	$\longleftrightarrow$	(...... , ...)
(...... , ...)	$\longleftrightarrow$	$(7, \frac{5\pi}{4})$
(2, ...)	$\longleftrightarrow$	(...... , $\frac{\pi}{3}$)
$y > 0$	$\longleftrightarrow$	$0 < \varphi < \pi$
....	$\longleftrightarrow$	$\varphi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$
....	$\longleftrightarrow$	$\varphi = \frac{\pi}{3}$
$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$	$\longleftrightarrow$	....
$x^2 + y^2 = 9$	$\longleftrightarrow$	$r = 3$
....	$\longleftrightarrow$	$r = 5,\ \varphi \in [\pi, 2\pi]$
....	$\longleftrightarrow$	$1 \leq r < 4$
$(x-3)^2 + y^2 \leq 9$	$\longleftrightarrow$	$r \leq 6\cos\varphi,\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$x^2 + (y-5)^2 = 25$	$\longleftrightarrow$	....

Ściąga. Zmiana całki podwójnej w układzie kartezjańskim na całkę podwójną w układzie biegunowym

$$\iint\limits_{P} f(x,y)\, d\omega = \iint\limits_{\bar{P}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\, d\bar{\omega}.$$

Uwaga. Owe '$\cdot r$' jest zwane jakobianem. PO CO TO? ....

Przykład. A

$$\iint\limits_{\substack{x\le 0,\ 0\le y\\ x^2+y^2\le 1}} x^4+y^4+2(xy)^2\, d\omega = \iint\limits_{\substack{r\le 1\\ \varphi\in[\pi/2,\ \dots\ ]}} r^4\cdot r\, d\bar{\omega} = \int\limits_{\pi/2}^{\dots}\int\limits_{0}^{1} r^5\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\pi/2}^{\dots} \frac{1}{\dots}1^6\, d\varphi = \frac{\pi}{\dots}.$$

Przykład. B

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le y\\ x^2+y^2\le 4}} xy\, d\omega = \iint\limits_{\substack{r\le 2\\ \varphi\in[\pi/4,\pi/2]}} r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot r\, d\bar{\omega} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{2} r^3\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\, dr\, d\varphi = \dots$$

Przykład KW1.
Niech K oznacza kulę o średnicy 2, a W – powierzchnię walca (nieskończoną rurę) o średnicy 1. Jaka część K leży poza W, gdy środek kuli leży na osi walca?

Zadanie jest NIEPRECYZYJNE, bo ....

Oto jedna z możliwych odpowiedzi: $\dfrac{obj(K\setminus W)}{obj(K)}$, gdzie

$$obj.(K\setminus W) = 2 \iint\limits_{\frac{1}{4}\le x^2+y^2\le 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\, d\omega \underset{\text{u.b.}}{=} 2\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-r^2}\cdot r\, dr\, d\varphi = \dots\dots$$

Przykład KW2.
Niech K oznacza kulę o średnicy 2, a W – powierzchnię walca (nieskończoną rurę) o średnicy 1. Jaka część K leży poza W, gdy środek kuli leży na powierzchni walca.

Zadanie jest NIEPRECYZYJNE, bo ....