

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 12B

| układ kartezjański (x, y, z) | \longleftrightarrow | układ cylindryczny (r, φ, h) | |
|---------------------------------------|-----------------------|---|--|
| | | $x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$ $z = h$ | |
| (1, 1, 1) | \longleftrightarrow | $r = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}, h = 1$ | |
| (-3, 3, -2) | \longleftrightarrow | $r = \dots, \varphi = \dots, h = \dots$ | |
| (\dots, \dots, \dots) | \longleftrightarrow | $r = 7, \varphi = \frac{7\pi}{4}, h = -2$ | |
| $x, y, z \geq 0$ | \longleftrightarrow | | |
| | \longleftrightarrow | $r \leq 2, \varphi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi], 1 \leq h \leq 5$ | |
| | \longleftrightarrow | $r = \sin \varphi, h = 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ | Wsk.: Pomnóż pierwsze równanie przez r . |
| | \longleftrightarrow | $r = \cos \varphi, 0 \leq h \leq r, \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ | |
| | \longleftrightarrow | $r = \frac{2}{\sin \varphi - 3 \cos \varphi}, h \in [0, 1]$ | Wsk.: Pomnóż równanie przez mianownik. |
| $y = x + \pi, z = 0$ | \longleftrightarrow | | |
| $x^2 + y^2 - 6y = 0, 1 \leq z \leq 4$ | \longleftrightarrow | | |
| $z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ | \longleftrightarrow | | |

ŚCIAĞA Zmiana całki potrójnej w układzie kartezjańskim na całkę potrójną w układzie cylindrycznym

$$\iiint_W f(x, y, z) d\omega = \iiint_{\bar{W}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r d\bar{\omega}.$$

PRZYKŁAD A.

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2 \leq 4 \\ 1 \leq z \leq 3}} xy+z d\omega = \iiint_{\substack{\varphi \in [0, 2\pi] \\ r \leq 2, h \in [1, 3]}} (r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi + h) \cdot r d\bar{\omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_1^3 \frac{1}{2} r^3 \sin 2\varphi + hr dh dr d\varphi =$$

PRZYKŁAD B.

$$\iiint_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4 \\ r \leq 4, r \leq h \leq 4}} z d\omega = \iiint_{\substack{\varphi \in [0, 2\pi] \\ r \leq 4, r \leq h \leq 4}} h \cdot r d\bar{\omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_r^4 hr dh dr d\varphi = \dots$$

PRZYKŁAD C.

Niech $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ i $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq x\}$.
Oblicz objętość $S \cap W$.

$$\iiint_{S \cap W} 1 d\omega = \iiint_{\substack{\varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \\ r \leq \cos \varphi, 0 \leq h \leq 1-r}} 1 \cdot r d\bar{\omega} = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \varphi} \int_0^{1-r} r dh dr d\varphi = \dots$$