Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 13a

Niech $f(x,y)$ będzie określona na krzywej $L \subseteq \mathbb{R}^2$. Dla podziału $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ o długościach Δs_i i dla punktów $(x_i, y_i) \in L_i$ tworzymy sumę $\sum\limits_{i \le n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$. Napis

$$\int\limits_L f(x,y)\, ds \approx \sum_{i \le n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$$

oznacza, że *całka krzywoliniowa nieskierowana* z f po L jest przybliżana przez owe sumy tym lepiej, im drobniejszy jest podział (dla 'porządnych' funkcji i krzywych).

Całkę tę można interpretować wielorako, np. (pomyśl o jednostkach):

– jako pole płotu (jednej strony) ustawionego na linii L o sztachetach o szerokościach ...... i wysokościach $f(x_i, y_i)$,

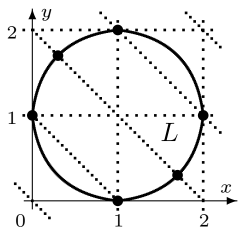
– jako cenę ułożenia rurociągu wzdłuż linii L, gdzie $f(x_i, y_i)$ mówi o koszcie budowy jednego metra(milimetra?) w miejscu (x_i, y_i),

– jako minimalny czas przejazdu (**zgodny z przepisami!**) trasy L , gdzie $f(x,y)$ podaje odwrotność ograniczenie maksymalnej szybkości w miejscu (x,y),

– ......

Przykłady. ('na palcach')

a) Okrąg L z rysunku obok jest podzielony na sześć części o długościach ...... , ... , ... , ... , ... , ...



Funkcja $f(x,y) = [x+y]^2$ jest na tych częściach stała (niemal). Zatem wybierając punkty z tych części (poza kropami) mamy:

$\int_L [x+y]^2\, ds = 9 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} + \ldots \cdot \frac{\pi}{4} + \ldots \cdot \frac{\pi}{4} = 7\pi.$

b) Dla $K =$ brzeg $[0,1]^2$ i $f(x,y) = y+1$:

$$\int\limits_K f(x,y)\, ds = \int\limits_{[0,1]\times\{0\}} \ldots\ldots\, ds + \int\limits_{\{1\}\times[0,1]} \ldots\ldots\, ds + \int\limits_{[0,1]\times\{1\}} \ldots\ldots\, ds + \int\limits_{\ldots\ldots\ldots} \ldots\ldots\, ds =$$

$$= \ldots\ldots \qquad\qquad = 6.$$

c) Dla $V = \{(x, |x|) : |x| \le 1\}$ i $f(x,y) = \pi x + y\sqrt{3}$:

$$\int\limits_V f(x,y)\, ds = \pi \cdot \int\limits_V \ldots\ ds + \ldots \cdot \int\limits_V \ldots\ ds =$$

$$= \ \ldots\ldots \ + \ \ldots\ldots \ = \sqrt{6}.$$

d) $\int\limits_{\substack{x^2+y^2=1 \\ x,y\ge 0}} \arcsin y\, ds = \ \ldots\ldots \qquad = \frac{1}{8}\pi^2.$

Tw. Gdy L ma paremetryzację $(x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ klasy $\mathcal{C}^1$ i f jest ciągła na L,

to $$\int\limits_L f(x,y)\, ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Dowód.

$\int\limits_L f(x,y)\, ds \approx \sum\limits_{i \le n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i \approx$ istnieją $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$ takie, że

$$\approx \sum_{i \le n} f(x(t_i), y(t_i)) \cdot \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i \le n} f(x(t_i), y(t_i)) \cdot \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i \le n} f(x(t_i), y(t_i)) \cdot \sqrt{\left(x'(\hat{t}_i)\right)^2 + \left(y'(\hat{t}_i)\right)^2} \cdot \Delta t_i \approx \quad \text{(z tw. Lagrange'a)}$$

$$\approx \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

□

Przykład.

a) Dla $L = \{(x, x^2) : x \in [0,1]\}$ z parametryzacją: $x = t,\ y = ...,\ t \in [..., ...]$:

$$\int_L \frac{y^3}{\sqrt{1+4x^2}}\,ds = \int_0^1 \frac{t^6}{\sqrt{1+4t^2}} \cdot \sqrt{(\ ......\ )^2 + (\ ......\ )^2}\,dt = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{7}.$$

b) $$\int_{\substack{x^2+y^2=4\\ y\le 0}} \sin(x^9) + 2y^2\,ds = \int_{\substack{x^2+y^2=4\\ y\le 0}} \sin(x^9)\,ds + \int_{\substack{x^2+y^2=4\\ y\le 0}} 2y^2\,ds = \ \ldots\ldots = 8\pi.$$

Tw. Gdy $\vec{r} : [a,b] \to \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Wniosek. Gdy $\vec{r} : [a,b] \to \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją (jednokrotną) łuku Γ, to długość tego łuku można opisać całką:

$$|\Gamma| = \int_\Gamma 1\,ds = \int_a^b 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Przykład. Gdy Γ jest łamaną ABC, gdzie $A(0,1,0), B(2,2,3), C(2,2,1)$, to parametryzujemy oddzielnie odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ np.

$\vec{r}_{AB} : [0,1] \to \overline{AB}$, $\vec{r}_{AB} = (2t, ... + t, 3t)$ i $\vec{r}_{BC} : [0,2] \to \overline{BC}$, $\vec{r}_{BC} = (2, ..., 3-t)$.

Wtedy $\int_\Gamma ... = \int_{\overline{AB}} ... + \int_{\overline{BC}} ...$, czyli

$$\int_\Gamma 2e^{y-1} + 2z\,ds = \int_0^1 (2e^t + 6t) \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}\,dt + \int_0^2 (2e^1 + 6 - 2t) \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{14} \cdot [2e^t + 3t^2]_0^1 + [(2e+6)t - t^2]_0^2 = (2e+1)\sqrt{14} + 4e + 8.$$

Całka powierzchniowa niezorientowana

Niech $f(x,y,z)$ będzie określona na powierzchni S. Podział $\omega = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ powierzchni S na 'prawie rozłączne płaty' o polach $|S_i|$ i wybór punktów $a_i \in S_i$ wyznacza pewne przybliżenie **całki powierzchniowej niezorientowanej**:

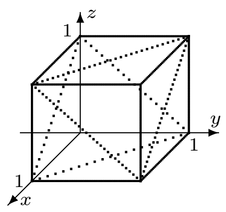
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS \approx \sum_{i=1}^m f(a_i) \cdot |S_i|$$

Dokładniej: jeśli dla coraz drobniejszych podziałów (o średnicach zbieżnych do 0) sumy po prawej stronie są coraz bliżej pewnej liczby (niezależnie od wyboru punktów), to tę liczbę nazywamy całką powierzchniową niezorientowaną funkcji f po powierzchni S.

Interpretacje. $\iint_S f(x,y,z)\,dS$:
- masa powierzchni S, której gęstość w punkcie (x,y,z) ma wartość $f(x,y,z)$ [kg/m^2],
- koszt wyłożenia pow. S kafelkami, których cena w (x,y,z) wynosi $f(x,y,z)$ [zł/m^2].

1. Na powierzchni S sześcianu $[0,1]^3$ $f(x,y,z)=[x+y+z]\cdot\pi$ przyjmuje wartości: $0\cdot\pi, 1\cdot\pi,$ ....Zatem

$\iint\limits_S [x+y+z]\cdot\pi\, dS = (0\cdot\pi)\cdot(3\cdot\frac{1}{2}) +$ ...... $+$ ...... $=$ ....



Dla funkcji $f(x,y,z)=[z]\cdot[y+7]$ mamy:

$\iint\limits_S [z]\cdot[y+7]\, dS = \iint\limits_{\ldots\ldots\ldots\ldots} [z]\cdot[y+7]\, dS =$ ....

Tw. Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x,y)$ określonej na obszarze $D\subseteq \mathbb{R}^2$, czyli gdy $S=\{(x,y,z): z=g(x,y),\ (x,y)\in D\}$, to całkę powierzchniową z funkcji $f: S\to\mathbb{R}$ zamieniamy na całkę podwójną

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\cdot\sqrt{1+(\tfrac{\partial g}{\partial x})^2+(\tfrac{\partial g}{\partial y})^2}\, d\omega\ .$$

2. $S=\{(x,y,z): 2x+3y+z=6,\ x,y,z\geq 0\}$ jest wykresem f-cji $g(x,y)=6-2x-\ldots$ o dziedzinie $D=\{(x,y): 0\leq x\leq 3,$ ...... $\leq y\leq$ .... $\}$; zatem

$\iint\limits_S (z-6)^2\, dS = \iint\limits_D (6-2x-3y-6)^2\cdot\sqrt{1+(-2)^2+\ \ldots}\ d\omega =$ ...... $= 54\sqrt{14}$

3. Półsfera $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=2z, z\geq 1\}$ jest wykresem funkcji $g(x,y)=$ ....o dziedzinie $D=\{(x,y):$...............$\}$; zatem

$\iint\limits_S z\, dS = \iint\limits_D(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )\cdot\sqrt{1+(\ \ldots\ )^2+(\ \ldots\ )^2}\ d\omega =$ ...... $= \frac{5}{3}\pi$

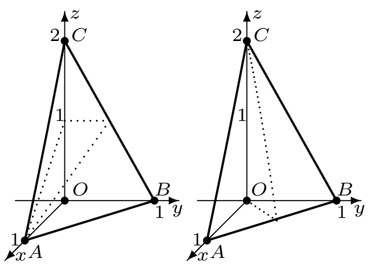
4. Dla brzegu S czworościanu $0ABC$ (p.rys.) całki powierzchniowe można obliczyć 'na palcach':

a) $\iint_S e^{[x+y]}\, dS =$ .... $= e^0\cdot|S| =$ ...

b) $\iint_S e^{[x-y]}\, dS =$ ....

c) $\iint_S e^{[x+z]}\, dS =$ ....

d) $\iint_S e^{[x+y+z]}\, dS =$ ....



Do których całek pomocne są rysunki (z prawej)?

4'. Oblicz. (Poniższe całki opisują objętości pewnych ostrosłupów; opisz je (słowami).)

a) $\iint\limits_{ABC} z\, dS = \{$obj. ostrosłupa o podstawie ΔABC i wysokości $2\} =$ ......

b) $\iint\limits_{ABC} x\, dS =$ ....

c) $\iint\limits_{ABC} x+y\, dS =$ ....

5. Oblicz $\iint\limits_{\substack{z+x^2+y^2=1\\ z\geq 0}} \sqrt[3]{1+4x^2+4y^2}\, dS =$ ...... $= \frac{3}{22}\pi(5^{11/6}-1).$