Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 13b

Bywa, że złoty łańcuszek jest na tyle cienki, że chcemy go uważać za okrąg L

$$L: \quad x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Jednak waga nam mówi, że ogniwa nie są jednakowe. Dokładniej jego gęstość (gęstość liniowa) jest równa $g(x, y) = 3y^2$, to znaczy, dla małego kawałeczka iloraz masy przez długość jest równy $3y^2$. Wtedy masa całego łańcuszka jest równa $M = \int_L g(x, y)\, dl$.

Podobnie rzecz się ma ze srebrną paterą S

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \le 0.$$

Waga w środku jest dużo większa niż przy brzegach (jest tam grubsza), np. jej gęstość (gęstość powierzchniowa) jest równa: $g(x, y, z) = 7|z|$, to znaczy dla małego kawałeczka iloraz masy przez pole powierzchni jest równy $7|z|$. Wtedy masa całej patery jest równa $M = \iint_S g(x, y, z)\, dS$.

A jak to jest z masą niejednorodnego trójkąta w $\mathbb{R}^2$ czy czworościanu w $\mathbb{R}^3$? Podobnie (ale już wystarcza 'zwykła' całka podwójna czy potrójna).

Przykład A.
Znajdź masę M pierwszego zwoju linii śrubowej $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,$ gdy gęstość w każdym punkcie jest proporcjonalna do kwadratu odległości od (0,0,0).

$$M = \int_L g(x, y, z)\, dl = \int_L k(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2\, dl =$$

$$= \int_0^{2\pi} k(\sqrt{(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + (bt)^2})^2 \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (b)^2}\, dt = \ldots$$

$$= k\sqrt{a^2 + b^2}\, 2\pi(a^2 + \tfrac{4}{3}b^2\pi^2). \qquad \square$$

UMOWA. Poniżej 'wyznacz' oznacza 'zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych w ukł. kartezjańskim i/lub cylindrycznym (biegunowym)'.

Przykład B. Niech S oznacza stożek o wysokości 1 i promieniu podstawy 1.
Niech W oznacza walec o średnicy podstawy równej 1 i wysokości 1, którego podstawa leży na podstawie stożka i na którego powierzchni bocznej leży wysokość stożka. Niech $V = S \cap W$. Zapisz jako całkę (lub sumę całek) iterowanych:

a) objętość V $\qquad 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\varphi} (1 - r)\, r\, dr\, d\varphi = \ \ldots\ldots \ = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{9}$

b) pole powierzchni V

c) długość 'krawędzi' V, to znaczy zbioru tych punktów powierzchni V, które nie są gładkie (w których nie ma płaszczyzny stycznej do powierzchni).

Tw. Gdy L ma paremetryzację $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ klasy $\mathcal{C}^1$ i f jest ciągła na L,

$$\text{to} \quad \int_L f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Tw. Gdy $\vec{r} : [a, b] \to \Gamma,\ \vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ,

$$\text{to} \quad \int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\, dt.$$

Tw. Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x, y)$ określonej na obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^2$, czyli gdy $S = \{(x, y, z) : z = g(x, y),\ (x, y) \in D\}$, to całkę powierzchniową z funkcji $f : S \to \mathbb{R}$ zamieniamy na całkę podwójną:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2}\, d\omega$$

Przykład C. Niech T oznacza trókąt o wierzchołkach $(1,0,0),(1,1,0),(0,0,3)$. Wyznacz jego masę gdy gęstość $g=g(x,y,z)$ jest proporcjonalna do kwadratu odległości od punktu (1,1,0) i ma największą wartość równą 7

gęstość $g=g(x,y,z)=k\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}^2$.

$7=\sup g[T]=g(0,0,3)$, (argument za ostatnią równością daje geometria)

zatem

$7=k\cdot\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+3^2}^2$

skąd

$k=\frac{7}{11}$.

Dalej zauważmy, że T jest wykresem funkcji $z=z(x,y)=3-3x$ o dziedzinie będącej trójkątem $D\subseteq\mathbb{R}^2$ o wierzchołkach $(0,0),(1,0),(1,1)$.

$$M=\iint\limits_T g(x,y,z)\,dS=\iint\limits_T \tfrac{7}{11}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}^3\,dS=$$
$$=\iint\limits_D \tfrac{7}{11}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(3-3x)^2}^2\cdot\sqrt{1+(-3)^2+(0)^2}\,d\omega=$$
$$=\tfrac{7\sqrt{10}}{11}\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^x\sqrt{10(x-1)^2+(y-1)^2}^2\,dy\,dx=\ \ldots\ldots\qquad=\tfrac{7\sqrt{10}}{4}.\quad\Box$$

Przykład D. Niech trójkąt z Przykładu C. obraca się w stałym tempie 3 obrotów na sekundę wokół osi OZ. Wyznacz jego energię kinetyczną.

'Mały' kawałeczek ΔT z punktu (x,y,z) ma szybkość $v=3\cdot2\pi\sqrt{x^2+y^2}$, bo w ciągu sekundy przebywa drogę $3\cdot2\pi\sqrt{x^2+y^2}$. Ma masę $\Delta M=g(x,y,z)\cdot|\Delta T|_{pole}$.
Zatem wnosi do energii kinetycznej wartość $\frac{1}{2}\cdot\Delta M\cdot v^2$.

$$E_{kin}=\iint\limits_T \tfrac{1}{2}\cdot(3\cdot2\pi\sqrt{x^2+y^2})^2\cdot\tfrac{7}{11}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}^2\,dT=$$
$$=\iint\limits_D \tfrac{126}{11}\pi^2\cdot(x^2+y^2)\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(3-3x)^2}^2\cdot\sqrt{1+(-3)^2+(0)^2}\,d\omega=$$
$$=\tfrac{126}{11}\pi^2\sqrt{10}\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^x\cdot(x^2+y^2)\cdot\sqrt{10(x-1)^2+(y-1)^2}^2\,dy\,dx=\tfrac{91}{\sqrt{10}}\pi^2\ \text{(wg Maximy)}$$

Tw. Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x,y)$ określonej na obszarze $D\subseteq\mathbb{R}^2$, czyli gdy $S=\{(x,y,z):z=g(x,y),\ (x,y)\in D\}$, to całkę powierzchniową z funkcji $f:S\to\mathbb{R}$ zamieniamy na całkę podwójną:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}\,d\omega$$

Przykład E. Półsfera S ma w danym punkcie gęstość równą kwadratowi odległości od osi symetrii. Wyznacz środek masy S.

Możemy przyjąć, że $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ jest wykresem funkcji $z = z(x, y) = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ o dziedzinie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Wtedy gęstość $g = g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}^2$.
Przy takiej gęstości środek masy leży oczywiście na osi symetrii (czyli na osi OZ).
Niech s oznacza trzecią współrzędną środka masy S.

Mamy: $s = \frac{1}{M} \iint\limits_S z \cdot g(x, y, z)\, dS$, gdzie $M = \iint\limits_S g(x, y, z)\, dS$

Obliczamy:

$$M = \iint\limits_S g(x, y, z)\, dS = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + (\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2 + (\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2}\, d\omega =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\, d\varphi = 2\pi \cdot \int\limits_0^1 \frac{r(r^2-1)+r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = \ldots = \frac{4}{3}\pi.$$

Dalej:

$$s = \frac{1}{M} \iint\limits_S z \cdot g(x, y, z)\, dS = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \iint\limits_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot (x^2 + y^2)\, dS =$$
$$= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + (\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2 + (\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2}\, d\omega =$$
$$= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, d\omega = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r^2 \cdot r\, dr\, d\varphi = \frac{3}{8}$$

Odp. Środek masy S leży na osi symetrii w odległości $\frac{5}{8}$ od sfery, po 'wewnętrznej' stronie sfery. □