Analiza matematyczna 3, Notatki 14a

Całka krzywoliniowa skierowana

Napis $\int\limits_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r}$ oznacza całkę krzywoliniową z pola $\vec{F}$ po krzywej skierowanej Γ.

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} \quad \approx \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}_i) \circ (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}),$$

gdzie punkty $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ leżą na krzywej Γ zgodnie z jej skierowaniem.
Przybliżenie jest tym lepsze, im 'gęściej' te punkty leżą na krzywej.

Interpretacja fizyczna: praca...

Przykład. Dla $\vec{F}(x,y) = (xy, x^2)$, $\Gamma = \{(x,x^2) : x \in [0,1]\}$ i $\vec{r}_i = \left(\frac{i}{n}, \left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$ mamy

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}_i) \circ (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{i^3}{n^3}, \tfrac{i^2}{n^2}\right) \circ \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{2i-1}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{i^3}{n^4} + \tfrac{2i^3-i^2}{n^4}\right) = \ldots = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^4} \left(3 \sum_{i=1}^{n} i^3 \; - \; \sum_{i=1}^{n} i^2\right) = \underset{z\,Wolframem}{dalej}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^4} \cdot \tfrac{1}{12} n(n+1)(9n^2+5n-2) = \tfrac{3}{4}$$

Inne oznaczenia: dla $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$,

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$

Tw. Gdy $\vec{r} : [a,b] \to \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b P(x(t),y(t))\,\tfrac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t))\,\tfrac{dy}{dt}\,dt.$$

Przykład c.d. Dla $\vec{F}(x,y) = (xy, x^2)$, $\Gamma = \{(t,t^2) : t \in [0,1]\}$ mamy

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \int\limits_\Gamma xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 t \cdot t^2\,\tfrac{dx}{dt} + t^2\,\tfrac{dy}{dt}\,dt = \int\limits_0^1 t \cdot t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 2t\,dt = \;\ldots\ldots\; = \tfrac{3}{4}$$

Przykład. (po innej krzywej) Dla $\vec{F}(x,y) = (xy, x^2)$, $\Gamma_2 = \{(t,t) : t \in [0,1]\}$ mamy

$$\int\limits_{\Gamma_2} \vec{F} \circ d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma_2} xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 t \cdot t\,\tfrac{dx}{dt} + t^2\,\tfrac{dy}{dt}\,dt = \int\limits_0^1 t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 1\,dt = \;\ldots\ldots\; = \tfrac{2}{3}$$

Dowód (szkic)

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} \;\approx\; \sum_i \vec{F}_i \circ \Delta\vec{r}_i \overset{*}{=} \sum_i \vec{F}_i \circ \left(\tfrac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \Delta t_i\right) = \sum_i \left(\vec{F}_i \circ \tfrac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \cdot \Delta t_i \approx \int\limits_a^b P\,\tfrac{dx}{dt} + Q\,\tfrac{dy}{dt}\,dt,$$

gdzie za 'wężyki' odpowiadają definicje, a za $\overset{*}{=}$ – pojęcie <u>wektora</u> prędkości. □

Dowód. (TEN SAM co powyżej! TEŻ szkic!)

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \approx$$

$$\approx \sum_{i<n} (P(x(t_i)), y(t_i)), Q(x(t_i), y(t_i))) \circ (x(t_{i+1}) - x(t_i), y(t_{i+1}) - y(t_i)) =$$

$$= \sum_{i<n} P(x(t_i)), y(t_i)) \cdot (x(t_{i+1}) - x(t_i)) + Q(x(t_i), y(t_i)) \cdot (y(t_{i+1}) - y(t_i)) =$$

$$= \sum_{i<n} \left(P(x(t_i)), y(t_i)) \cdot \tfrac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\Delta t} + Q(x(t_i), y(t_i)) \cdot \tfrac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{\Delta t}\right) \Delta t =$$

$$= \sum_{i<n} \left(P(x(t_i)), y(t_i)) \cdot x'(\hat{t}_i) + Q(x(t_i), y(t_i)) \cdot y'(\bar{t}_i)\right) \Delta t \approx$$

$$\approx \int\limits_a^b P(x(t), y(t))\,\tfrac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t))\,\tfrac{dy}{dt}\,dt.$$

□

Dla pola $\vec{F} = (P,Q)$, gdzie $P(x,y) = x + y$, $Q(x,y) = 2y$ i okręgu jednostkowego L mamy

- przy parametryzacji $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \le t \le$ ... :

$$\int\limits_L P dx + Q dy = \int\limits_0^{\dots} (\cos t + \;\dots\dots\;) \cdot (-\sin t) + (2 \;\dots\dots\;) \cdot \;\dots\dots\; dt = \dots \qquad = -\pi$$

- przy **innej** parametryzacji L_1: $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $\pi \le t \le 3\pi$

$$\int\limits_{L_1} P dx + Q dy = \int\limits_\pi^{\dots} (\sin t + \;\dots\dots\;) \cdot (\cos t) + (2 \;\dots\dots\;) \cdot \;\dots\dots\; dt = \dots \qquad = \pi$$

DLACZEGO inny wynik?! Bowiem...

- przy **innej** parametryzacji L_2: $x(t) = \cos t^2$, $y(t) = \sin t^2$, $0 \le t \le \sqrt{2\pi}$

$$\int\limits_{L_2} P dx + Q dy = \int\limits_0^{\dots} (\cos t^2 + \;\dots\dots\;) \cdot (-2t \sin t^2) + (2 \;\dots\dots\;) \cdot \;\dots\dots\; dt = \dots \qquad = -\pi$$

Ogólnie: gdy Γ oznacza łuk od A do B (gdzie porządek jest wyznaczony przez pewną parametryzację), to przez $-\Gamma$ rozumiemy ten sam zbiór punktów, ale uporządkowany przeciwnie: od B do A; wtedy $\int\limits_{-\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Gdy $\vec{r} : [a,b] \to \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to całkę skierowaną zamieniamy na 'zwykłą': $\int\limits_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \int\limits_a^b P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt}\, dt$

Przykład. Gdy Γ jest łamaną ABC, gdzie $A(0,1,0), B(2,2,3), C(2,2,1)$, to parametryzujemy oddzielnie AB i BC np. $\vec{r}_{AB} : [0,1] \to \overline{AB}$, $\vec{r}_{AB} = (2t, 1+t, 3t)$ i $\vec{r}_{BC} : [0,2] \to \overline{BC}$, $\vec{r}_{BC} = (2,2,3-t)$. Wtedy $\int_\Gamma \dots = \int_{\overline{AB}} \dots + \int_{\overline{BC}} \dots$ i

$$\int_\Gamma z^2 dx + xz dy + y dz = (\int_{\overline{AB}} z^2 dx + xz dy + y dz) + (\int_{\overline{BC}} z^2 dx + xz dy + y dz) =$$
$$= \int_0^1 (3t)^2 \cdot 2 + 2t \cdot 3t \cdot 1 + (1+t) \cdot 3\, dt + \int_0^2 (3-t)^2 \cdot 0 + 2 \cdot (3-t) \cdot 0 + 2 \cdot (-1)\, dt =$$
$$= \int_0^1 24t^2 + 3t + 3\, dt + \int_0^2 -2\, dt = \left[8t^3 + \tfrac{3}{2}t^2 + 3t\right]_0^1 + [-2t]_0^2 = 12{,}5 + (-4) = 8{,}5 \; .$$