Analiza matematyczna 3, Notatki 14.b

$f(x,y)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F}=(P,Q)$, gdy $P=\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$.
$f(x,y,z)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F}=(P,Q,R)$, gdy $\vec{F}=\mathrm{grad}\,(f)$.

Czy pole wektorowe ma potencjał? Czasami można... odgadnąć takie f, spróbuj:

a) $\vec{F}(x,y)=(x,y)$ **b)** $\vec{F}(x,y)=(y,x)$ **c)** $\vec{F}(x,y)=(x^2,y^2)$

d) $\vec{F}(x,y)=(y^2,x^2)$ **e)** $\vec{F}(x,y)=(xy^2,x^2y+y^3)$ **f)** $\vec{F}(x,y)=(ye^x,e^x)$

g) $\vec{F}(x,y)=(e^x-\sqrt{2},\frac{1}{1+y^2}+\pi)$ **h)** $\vec{F}(x,y,z)=(2xyz,x^2z,x^2y+1)$

i) $\vec{F}(x,y)=(e^y,xe^y+y)$ **j)** $P(x,y)=y^2e^{xy},\ Q(x,y)=(1+xy)e^{xy}$

k) $\vec{F}(x,y,z)=(2xyz,x^2z,x^2y+1)$ **l)** $P=yz,\ Q=xz,\ R=xy$

m) $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xz+1,2y(z+1),x^2+y^2+3z^2)$ **n)** $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,z,y)$

Odp. a) $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, **d)** brak, **h)** $f(x,y,z)=x^2yz+z$, **n)** $f(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+yz$

Twierdzenie 1. Gdy $\vec{F}=\mathrm{grad}\,f$ i $\vec{r}:[a,b]\to\Gamma$ jest gładką parametryzacją łuku Γ skierowanego od $A=\vec{r}(a)$ do $B=\vec{r}(b)$, to

$$\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=f(B)-f(A)$$

Innymi słowy: Jeśli pole wektorowe ma potencjał f, to całka skierowana od A do B nie zależy od drogi, jest równa różnicy potencjałów tego pola $f(B)-f(A)$.

Przykład.
Gdy $\vec{F}(x,y)=(2xy^2,2x^2y)$, Γ krzywa od $A=(5{,}2)$ do $B=(9{,}1)$, to

$$\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}\underset{\substack{f(x,y)=x^2y^2\\ F=\mathrm{grad}f}}{=}f(B)-f(A)=9^2\cdot1^2-5^2\cdot2^2=-19$$

Przykład.
Gdy $\vec{F}(x,y)=(y\cos xy,x\cos xy)$ i Γ krzywa od $A=(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{3})$ do $B=(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{2})$,
to $\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=\ldots$ $=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

Zadanie.
Niech f,g,h będą ciągłymi funkcjami **jednej** zmiennej. Udowodnij, że całka $\int_\Gamma f(x)dx+g(y)dy+h(z)dz$ nie zależy od drogi Γ (zależy tylko od początku i końca).

Twierdzenie 1^{-1}. Gdy pole $\vec{F}$ ma własność: całki z pola wektorowego po dowolnej krzywej od A do B są jednakowe, dla wszystkich $A,B\in\mathbb{R}^m$, to $\vec{F}$ ma potencjał.

.

Dowód.

$$\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=\int_a^b P(x(t),y(t))\,\frac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t))\,\frac{dy}{dt}\,dt=$$

$$=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\,\frac{dy}{dt}\,dt=$$

$$=[f\,(x(t),y(t))]_a^b=f\,(x(b),y(b))-f\,(x(a),y(a))=f\,(\vec{r}(b))-f\,(\vec{r}(a)).\quad\square$$

TWIERDZENIE GREENA. Niech Γ będzie krzywą płaską skierowaną dodatnio (przeciwzegarowo) ograniczającą obszar Ω bez 'dziur' i niech $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ będzie polem wektorowym określonym na Ω, gdzie P, Q są klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\omega \qquad \text{wersja [rot]}$$

oraz

$$\int_\Gamma -Q\,dx + P\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) d\omega \qquad \text{wersja [div]}$$

DOWÓD? Piękny! ZASTOSOWANIA? Jeszcze bardziej.

PRZYKŁAD 1. Niech $\vec{F} = (\cos e^x - y, 3x + \sin(y^3 + y))$, $\Gamma = \{(x,y); x^2 + y^2 = 4\}$ skierowany dodatnio. Wtedy:

$$\int_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_{x^2+y^2\leq 4} \frac{\partial\left(3x+\sin(y^3+y)\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\cos e^x - y\right)}{\partial y}\, d\omega = \iint_{x^2+y^2\leq 4} 3 - (-1)\, d\omega = 4 \cdot \pi 2^2$$

UWAGA. Ten sam wynik otrzymamy dla $\vec{F}(x,y) = (-y + cosik(x), 3x + jakiesik(y))$.

PRZYKŁAD 2. Dla $\vec{F}(x,y) = (x^4 + y, 4x + \sin y^2)$, $K = \{(x,y); x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0\}$ skierowanej od $(2,0)$ do $(-2,0)$.

Tu nie można wprost zastosować tw.G., bo K nie ogranicza żadnego obszaru. Można ją uzupełnić, np. odcinkiem od $A = (-2,0)$ do $B = (2,0)$. Łącznie te dwie krzywe ograniczają półkole $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$. Wtedy:

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_{AB} \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, d\omega,$$

skąd

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, d\omega - \int_{AB} \vec{F} \circ d\vec{r} =$$

$$= \iint_\Omega 4 - 1\, d\omega - \int_{-2}^{2} (t^4 + 0) \cdot 1 + (4t + \sin 0) \cdot 0\, dt = \qquad \text{tu } AB : \left\{ \begin{smallmatrix} x=t \\ y=0 \end{smallmatrix} \right., \ t \in [-2,2]$$

$$= 3 \cdot \tfrac{1}{2}\pi 2^2 - (\tfrac{1}{5}t^5)_{-2}^{2} = 6\pi - \tfrac{64}{5}$$

□

PRZYKŁAD 3. $\vec{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, $\Omega = \{(x,y); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$,

(tu brzeg Ω to DWA okręgi; JAK tu określić skierowanie???)

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = ...$$