

### ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI 14. POLA WEKTOROWE

Niech  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Funkcję  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  nazywać będziemy polem wektorowym.

Na przykład dla  $F(x, y) = (x + y, x^2)$  mamy  $F(2, 1) = (3, 4)$  i  $F(1, 3) = (4, 1)$ .

Graficznie można przedstawiać  $F$  następująco:

w punkcie  $(x, y)$  zaczepiamy wektor (strzałkę) o współrzędnych  $F(x, y)$ ,  
czyli np.:

w punkcie  $(2, 1)$  jest początek strzałki o współrzędnych  $(3, 4)$ ,

w punkcie  $(1, 3)$  jest początek strzałki o współrzędnych  $(4, 1)$ .

#### ZADANIE 1.

Na następnej stronie jest kilkanaście rysunków pól wektorowych.

Dopasuj podane wzory do odpowiednich rysunków.

#### DEFINICJA.

$f(x, y)$  nazywamy potencjałem pola wektorowego  $\vec{F} = (P, Q)$ , gdy  $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ .

$f(x, y, z)$  nazywamy potencjałem pola wektorowego  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , gdy  $\vec{F} = \text{grad}(f)$ .

#### ZADANIE 2.

Czy pole wektorowe ma potencjał? Czasami można... odgadnąć takie  $f$ , spróbuj:

a)  $\vec{F}(x, y) = (x, y)$     b)  $\vec{F}(x, y) = (y, x)$     c)  $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$

d)  $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$     e)  $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x^2y + y^3)$     f)  $\vec{F}(x, y) = (ye^x, e^x)$

g)  $\vec{F}(x, y) = (e^x - \sqrt{2}, \frac{1}{1+y^2} + \pi)$     h)  $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$

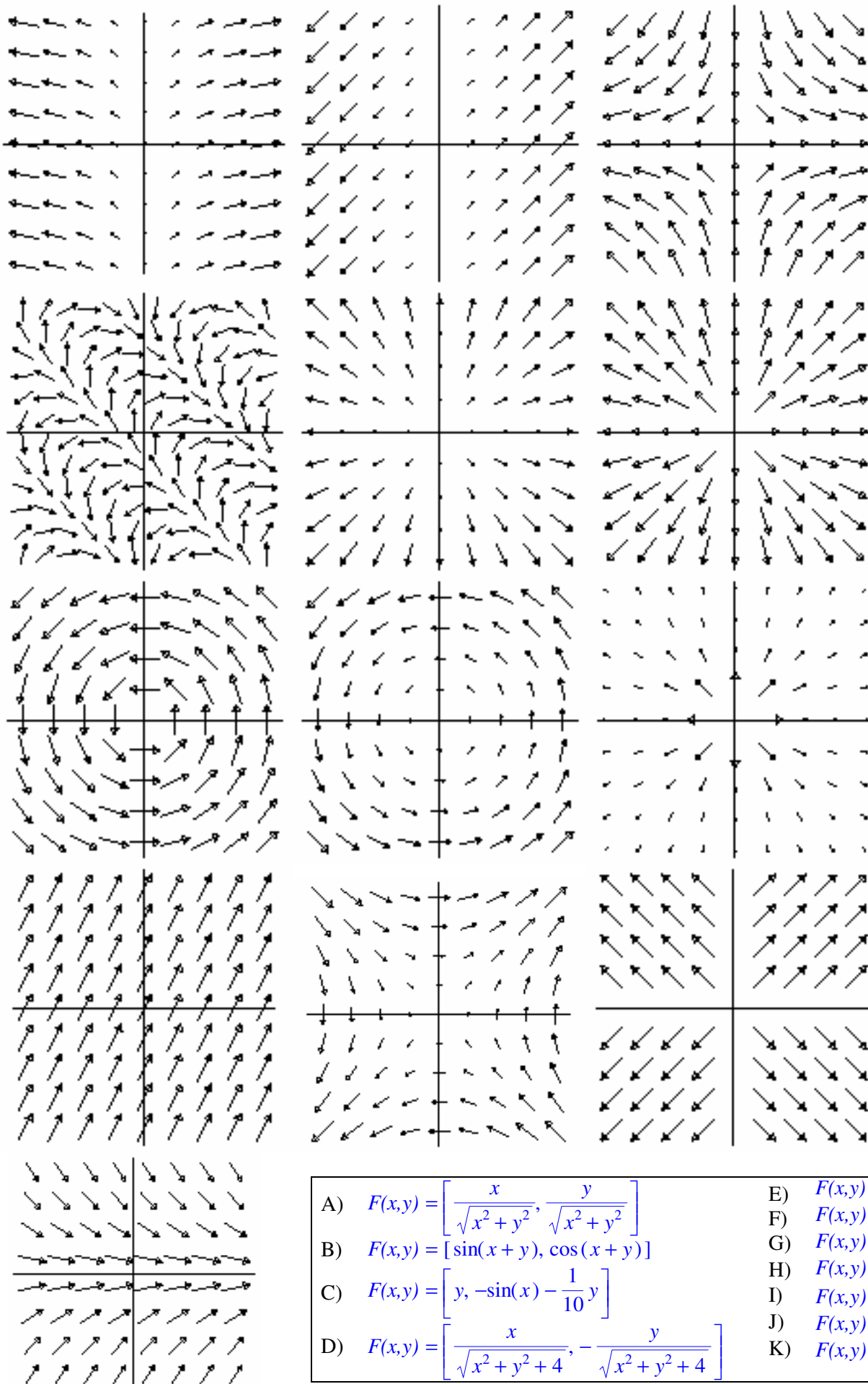
i)  $\vec{F}(x, y) = (e^y, xe^y + y)$     j)  $P(x, y) = y^2e^{xy}$ ,  $Q(x, y) = (1 + xy)e^{xy}$

k)  $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$     l)  $P = yz$ ,  $Q = xz$ ,  $R = xy$

m)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + 1, 2y(z + 1), x^2 + y^2 + 3z^2)$     n)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, z, y)$

o)  $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, xz)$     p)  $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

**Odp.** a)  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , d) brak, h)  $f(x, y, z) = x^2yz + z$ , n)  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x + yz$



- |                                                                                      |                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| A) $F(x,y) = \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right]$      | E) $F(x,y) = [1, 2]$    |
| B) $F(x,y) = [\sin(x+y), \cos(x+y)]$                                                 | F) $F(x,y) = [y, x]$    |
| C) $F(x,y) = \left[ y, -\sin(x) - \frac{1}{10}y \right]$                             | G) $F(x,y) = [-y, x]$   |
| D) $F(x,y) = \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+4}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+4}} \right]$ | H) $F(x,y) = [y, x, x]$ |
|                                                                                      | I) $F(x,y) = [y, x^2]$  |
|                                                                                      | J) $F(x,y) = [x, y]$    |
|                                                                                      | K) $F(x,y) = [x, 1]$    |