Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 2.a

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$, parze $(x,y) \in D$ przyporządkowuje liczbę $f(x,y)$.
Jej wykresem jest zbiór

$$\{(x,y,z) : z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}\ ,$$

inaczej pisząc:

$$\{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in D\}\ .$$

Wykres jest podzbiorem .... Jego rzut na płaszczyznę $z = 0$ jest 'równy' ....
Zbiór $f[D]$, zawarty w ...... , jest rzutem wykresu na ....

* * *

1. Niech $f(x,y) = x^2 - y + 2$.

a) Oblicz: $f(2,3) =$ .... , $f(3,2) =$ .... , $f(0,0) =$ .... ,

$f(x,3) =$ .... , $f(x,4) =$ .... , $f(x,5) =$ .... ,

$f(1,y) =$ .... , $f(2,y) =$ .... , $f(3,y) =$ .... ,

$f(x,-x) =$ ....

b) Rozwiąż równania. Co one mówią o wykresie f?

(i) $f(x,4) = 0$, z (i) wynika, że prosta .... przecina wykres w ....

(ii) $f(4,y) = 0$, z (ii) wynika, że ....

(iii) $f(x,x) = 0$, z (ii) wynika, że ....

(iv) $f(s,s) = 1$, z (ii) wynika, że ....

c) Zaznacz w (jednym) układzie współrzędnych następujące zbiory:

$A = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$,

$B = \{(x,y) : f(x,y) = \frac{1}{2}\}$,

$C = \{(x,y) : f(x,y) = 1\}$.

Jak je zgrabniej oznaczć?

c') Zaznacz w (jednym) układzie współrzędnych następujące zbiory:

$A = \{(x,z) : z = f(x,y),\ y = 0, x \in \mathbb{R}\}$,

$B = \{(x,z) : z = f(x, \frac{1}{2})\}$,

$C = \{(x, f(x,1)) : x \in \mathbb{R}\}$.

Jak je zgrabniej oznaczć?

d) Następujące zbiory leżą na płaszczyznach. Narysuj je (płaszczyzny i zbiory).

$A = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \ \wedge \ y = 1\}$,

$B = \{(x, 2, f(x, 2)) : x \in \mathbb{R}\}$,

$C = \{(-1, y, z) : z = f(-1, y)\}$,

$D = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \ \wedge \ y = x + 1\}$,

$E = \{(x, y, f(x, y)) : x = 1\}$,

$F = \{(x, x, z) : z = f(x, x)\}$

2. Jak wyglądają wykresy funkcji: $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 - y$, $h(x, y) = x^3 - x$?

Przykład. Dla $f(x, y) = xy$ cięcie wykresu
płaszczyzną $y =$ ...... jest prostą nachyloną do płasczyzny $z = 0$ pod kątem $\pi/4$,
a dla ciącia $y = -\sqrt{3}$ jest prostą nachyloną do płasczyzny $z = 0$ pod kątem ....
Cięcia wykresu płaszczyznami $x = c$ są również prostymi: $\{(c, y, z) : z = cy, \ y \in \mathbb{R}\}$.
Zatem wykres jest sumą (nieskonczoną) prostych – powierzchnia $z = xy$ jest przykładem powierzchni *prostokreślnej*.

Natomiast poziomice nie są prostymi; bowiem dla $s \in \mathbb{R}_+$

$$P_s = \{(x, y) : f(x, y) = s\} = \{(x, y) : \ ...... \ = s\} = \{)x, y) : y = s \cdot \tfrac{1}{...}\},$$

czyli są to .... Dla pozostałych s też otrzymujemy ....
(z wyjątkiem $s =$ ...... , gdzie dostajemy sumę ....).

* * *

UMOWA. Jeśli podano wzór funkcji $f = f(x, y)$, ale jawnie nie podano dziedziny, to przyjmujemy, że dziedziną są **wszystkie** pary $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla których wzór ma sens.

Na przykład:

- $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{\ln x}$ ma dziedzinę $D_f = \mathbb{R}^2_+ \setminus (\{1\} \times \mathbb{R}) = ((0, +\infty) \setminus \{1\}) \times (0, +\infty)$.
- $g(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-z^2}}$ ma dziedzinę $D_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, |z| < 1\}$
  inaczej: $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \times (-1, 1)$, (walec bez obu podstaw)

3. Opisz (i naszkicuj) obszar będący dziedziną funkcji:

a) $f(x, y) = \ln{(xy)}$ **b)** $g(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$

Symetrie wykresów (niektórych) funkcji

(i) Dla $g(x,y)=\sin(x+|y|)$ mamy: $g(x,y)=g(x,-y)$, dla każdego $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Pary punktów wykresu $(x,y,g(x,y))$, $(x,-y,g(x,-y))$ leżą symetrycznie względem płaszczyzny $y=0$ (OXZ); ta płaszczyzna jest płaszczyzną symetrii wykresu g. Korzyść z tego taka, że 'wystarczy zrozumieć' część wykresu, dla par z $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ – resztę 'zobaczymy w lustrze'.

(ii) Dla $f(x,y)=(x-3)^2+y$ mamy:
$f(2,5)=f(4,5)$, $f(-1,c)=f(7,c)$, $f(5,d)=f(\ \dots\ ,d)$, $f(3+h,y)=f(3\ \dots\dots\ ,y)$.
Widać, że **pary** punktów wykresu: $(3+h,y,f(3+h,y))$, $(3-h,y,f(3-h,y))$ 'oglądają się w lustrze' $x=3$, czyli wykres f ma płaszczyznę symetrii $x=3$.

(iii) Niech h będzie taka, że $h(x,y)=h(8-x,y)$, dla każdego $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Mamy:
$h(2,5)=h(\dots,5)$, $h(\dots,c)=h(9,c)$, $h(\pi,d)=h(\dots,d)$, $h(\dots+s,y)=h(\dots-s,y)$.
Zatem **pary** punktów: $(\dots+s,y,h(\dots+s,y))$, $(\dots-s,y,h(\dots-s,y))$ 'oglądają się w lustrze' $\dots\ =\ \dots$, czyli wykres h ma płaszczyznę symetrii $\dots\ =\ \dots$.

(iv) Para punktów $(2,1,5),(-2,-1,5)$ leży symetrycznie względem osi OZ, również para $(\pi,-3,7),(\dots,\dots,7)$ oraz $(x,\dots,z),(\dots,4,\dots)$.
Oś OZ jest osią symetrii wykresu $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\iff f(x,y)=f(\dots,\dots)$, dla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

(v) Niech $L=\{(a,b)\}\times\mathbb{R}$ (prosta przechodząca przez punkty $(a,b,0)$, $(a,b,1)$).
L jest osią symetrii wykresu $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\iff f(x,y)=f(\ \dots\ ,\ \dots\ )$, dla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Uwaga.
Oś OZ nie jest osią symetrii wykresu funkcji $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$, bo ......

(vi) Wykres $g(x,y)=4-|x|-|y|$ ma wiele symetrii: np.: ....

(vi) Jeszcze więcej ma wykres $h(x,y)=4-|x^2|-y^2$. Ile? ....

4. Dobierz odpowiednią funkcję (i jej dziedzinę) tak, by jej wykres wyglądał jak:

a) trójkąt o wierzchołkach $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,8)$

b) powierzchnia boczna stożka o wysokości (0,0,0)(0,0,2) i promieniu podst. = 5

c) dach dwuspadzisty domu 8×10 o wysokości 7

d) pół powierzchni piłki do rugby **e)** blacha falista **f)** wulkan

5. Niech $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Niektóre z poniższych napisów nie mają sensu – które?

$f(g(x,y),y)$, $f(g(x,y),g(x,y))$, $f(g(x),g(y))$, $g(f(g(x,y),x),x)$, $g(f(x+1,y)+x)$