Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 3.b

Def. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{p\in D}{\forall} \ |p - \ \ldots\ldots \ | < \delta \Rightarrow |f(\ \ldots \ ) - f(p_0)| < \varepsilon \ .$$

Innymi słowy (dla $p_0 = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$):

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{(x,y)\in D}{\forall} \ \sqrt{\ \ldots\ldots \ ^2 + \ \ldots\ldots \ ^2} < \delta \Rightarrow |f(\ \ldots \ ) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \ .$$

Można też tak: f jest ciągła w $p_0 \in D$, gdy albo ma w tym punkcie granicę równą $f(p_0)$, albo p_0 jest punktem izolowanym D (tzn. nie jest punktem skupienia D).

Def. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła, gdy f jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

1. Podaj zbiór wszystkich punktów, w których f jest ciągła, gdzie

a) $f(x, y) = [x] + y$

Odp.: $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$
(czyli wszystkie punkty $\mathbb{R}^2$ poza punktami o całkowitej pierwszej współrzędnej)

b) $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \sqrt{2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

Odp.: $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}) \cup \{(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \ \ldots\ldots \ )\}$

Innymi 'znaczkami': $\{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 1\}) \cup \{(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \ \ldots\ldots \ )\}$

'prozą': (płaszczyzna bez okręgu $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$)) i jeszcze jeden punkt: (... , ...)

b') $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

Odp.: $\{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 1\}) \cup \{(\ \ldots \ , \ \ldots \ ), (\ \ldots \ , \ \ldots \ )\}$

'prozą': dopełnienie okręgu $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$) wraz punktami: (... , ...), (... , ...)

c) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } (x,y) \in [0,1]^2 \\ p & \text{dla } (x,y) \notin [0,1]^2 \end{cases}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem.

ODP. Niech $B = [0,1]^2 \setminus (0,1)^2$ (brzeg kwadratu).
Zbiór punktów ciągłości f (w zależności od p) jest równy:

$\mathbb{R}^2 \setminus B$ dla $p \notin [0, \;...\;]$,
$\big(\mathbb{R}^2 \setminus B\big) \cup \{(p-1,1),(1,p-1)\}$ dla $p \in [1, \;...\;]$,
$\big(\mathbb{R}^2 \setminus B\big) \cup \{(p,0),(0, \;...\;)\}$ dla $p \in [\;...\;, 1]$. □

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 5y-6 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ **e)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

ROZWIĄZANIE.**d)**
Funkcja f jest oczywiście ciągła w punktach zbioru $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$, czyli poza osią OY.

Rozważmy punkt $p_0 = (0, y_0)$ osi OY.
Z jednej strony mamy:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ x\neq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ x\neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{x} = \lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ x\neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x} = \lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ x\neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot y^2 = 1 \cdot y_0^2,$$

gdzie ostatnia równość wynika z LEMAT $\lim_{s\to 0} \frac{e^s-1}{s} = 1$.
(Lemat jest dla fuunkcji jedej zmiennej i można go dowieść regułą d'H ... .
Można go zastosować, bo $s := x^2y$ dąży do $0^2 y_0 = \underline{0}$, przy $(x,y) \to (0,y_0)$.)

Z drugiej strony:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x=0}} 5y-6 = 5y_0 - 6 = f(0,y_0).$$

Zatem f jest ciągła w $p_0 = (0,y_0) \iff y_0^2 = 5y_0 - 6 \iff y_0 \in \{2,3\}$.

ODP. Zbiór punktów ciągłości f jest równy: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \cup \{(0,2),(0,3)\}$. □

Dowody poniższych twierdzeń są 'smutne' (wystarczy zastosować ....).
TW. Niech f_1 i f_2 będą ciągłe w punkcie p. Wtedy w punkcie p są ciągłe:
$f(p) := f_1(p) \pm f_2(p)$,
$f(p) := f_1(p) \cdot f_2(p)$,
$f(p) := 2^{f_1(p)}$,
$f(p) := \sin(f_1(p))$.
Jak pierwsze dwa 'wysłowić prozą'? Jak uogólnić ostatnie dwa przykłady?

TW. Niech $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą ciągłe: g_1 w x_0 i g_2 w ....
Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie ciągła w punkcie ....
Wtedy funkcja $h : \mathbb{R}^{\cdots} \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = f(g_1(x), \;......\;)$ jest ciągła w punkcie ......