Analiza matematyczna 3. Wykład 3c. (WypełNiańka - 'sklejanie' funkcji)

Jak wygląda wykres funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+3 & dla \quad x^2+y^2 \le 4^2 \\ \sqrt{25-x^2-y^2} & dla \quad x^2+y^2 > 4^2 \end{cases}$?

W pierwszym napisie $\frac{1}{2}x+3$ rozpoznajemy równanie .... $z = \frac{1}{2}x+3$,
ale <u>nie</u> jest to cała .... lecz tylko jej część 'żyjąca' nad kołem $x^2+y^2 \le 4^2$.
Uwaga: ta część nie jest kołem, lecz .... (bo ....).

W napisie $\sqrt{25-x^2-y^2}$ rozpoznajemy równanie .... $z = \sqrt{25-x^2-y^2}$,
ale <u>nie</u> jest to cała ....lecz tylko jej część 'żyjąca' nad ....$4^2 < x^2+y^2 \le 5^2$.

Zatem f jest 'sklecona' z dwóch funkcji; wykres f jest sumą wykresów dwóch funkcji:
$a(x,y) = \frac{1}{2}x+3$, o dziedzinie $D_a = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4^2\}$ (pełne koło, z brzegiem),
$b(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$, o dziedzinie $D_b = \{(x,y) : 4^2 < x^2+y^2 \le 5^2\}$ (......).

<u>Wydaje się</u>, że wykresy funkcji a, b dotykają się (ale przecież są rozłączne, bo rozłączne są ich ....). Zatem <u>co nam się wydaje?</u>
<u>Wydaje się</u>, że wykresy f-cji a, b przecinają się w punktach $(0,-4,3)$, $(0,4,3)$.

Zajmijmy się punktem $(0,4,3)$.
Nie należy on do wykresu funkcji b (bo ....), <u>ale</u> .
<u>jeśli</u> zbliżamy się punktami $(x,y) \in D_b$ do $(0,4)$, <u>to</u> wartości $b(x,y)$ są coraz bliższe 3.
co formalnie oznaczymy: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,4) \\ (x,y)\in D_b}} b(x,y) = 3$.
Zatem f w pobliżu $(0,4)$ z 'każdej strony' 'ładnie' się zachowuje;
<u>jeśli</u> zbliżamy się punktami (x,y) do $(0,4)$, <u>to</u> wartości $f(x,y)$ są coraz bliższe $f(0,4)$.

To, co widzimy/czujemy nazywa się ciągłością funkcji f w punkcie $(0,4)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,4)} f(x,y) = f(0,4)$$

Nietrudno odgadnąć, że zbiór wszystkich punktów, w których f jest ciągła jest równy

$$\{(x,y) : x^2+y^2 \le 5^2,\ x^2+y^2 \ne 4^2\} \cup \{(0,4),(0,-4)\}.$$

* * *

Jak wygląda wykres $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x^2-y^2 & dla \quad x^2+y^2 \le 4 \\ 5-(x^2+y^2) & dla \quad x^2+y^2 > 4 \end{cases}$?

Wykres funkcji f jest sumą wykresów funkcji:
$a(x,y) = x^2-y^2$ określona na $D_a = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$ (pełne koło, z brzegiem),
$b(x,y) = 5-(x^2+y^2)$, określona na zewnętrzu koła: $D_b = \{(x,y) : x^2+y^2 > 4\}$.

Zbiór punktów ciągłości f jest równy $\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x^2+y^2 = 4\}\right) \cup \{ .... \}$.