Analiza matematyczna 3. Notatki z Wykładu 3.(ciągi)

c0. Podaj cztery wyrazy ciągu:

a) $a_n = \left(3 - \frac{1}{10^n}, \frac{1}{n^2}\right)$, $a_1 = (..., ...)$, $a_2 =$ ...... , $a_3 =$ ...... , $a_4 =$ ......

b) $b_k = (k, 1/k)$,

Def. Niech ciąg (p_n) przyjmuje wartości w $\mathbb{R}^m$ i niech $g \in \mathbb{R}^m$.
Mówimy, że ciąg (p_n) jest zbieżny do g, gdy ciąg odległości $|a_n - g|$ jest zbieżny do 0, innymi słowy (czy raczej 'innymi krzaczkami'):

$$\lim_{n\to\infty} p_n = g \quad \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} |p_n - g| = 0.$$

DLACZEGO to ma sens; przecież lim jest tu definiowany przez lim !?
Odpowiedź: ten lim po prawej stronie jest już znany (np. z AM1)!
Po prawej to nie jest wartość bezwzględna, ale **norma** w $\mathbb{R}^m$.

Gdy uwzględnimy (z AM1) definicję zbieżności ciągu wg Cauchy'ego mamy:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = g \quad \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall_{\varepsilon>0}\ \exists\ ...\ \ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ n \geq N\ \Rightarrow\ |p_n - ...| < \varepsilon\ .$$

Dla $m = 2$, przy oznaczeniach: $p_n = (x_n, y_n)$, $g = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = g \quad \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{...\geq N}\ \sqrt{...........\ +\ ....} < \varepsilon\ .$$

c1. Udowodnimy, że $g =$ ...... jest granicą ciągu $b_n = \left(\frac{4n+3}{2n+1}, \frac{5n}{6n^2+7}, \frac{8n}{n+9}\right)$
Zauważmy, że

$$|b_n - \ ......\ | = \left| \left(2 + \frac{...}{2n+1}, \frac{5n}{6n^2+7}, 8 - \frac{72}{n+...}\right) - \ ....\ \right| = \ ....$$

$$\leq\ ....$$

Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla każdego naturalnego $n \geq$ ...... mamy $|b_n - g| < \varepsilon$ □

c2. Udowodnimy, że granicą ciągu $a_n = \left(\frac{1}{......}, \frac{n-1}{......}\right)$ punktów płaszczyzny ($\mathbb{R}^2$) jest punkt $g = (..., ...)$. Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$|a_n - (0,1)| = \sqrt{\left(\frac{1}{2n+3} - ...\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n} - ...\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(2n+3)^2} + \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{n(2n+3)}\sqrt{5n^2+12n+9} \leq \frac{1}{n(2n+3)}\sqrt{26n^2} = \frac{......}{2n+3}\ .$$

Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla każdego naturalnego $n \geq$ ...... mamy $|a_n - g| < \varepsilon$ □

Tw. Ciąg $a_n = (x_n, y_n)$ jest zbieżny do $g = (x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny po osiach, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

c3. Dzięki temu twierdzeniu, można (niemal) w pamięci obliczyć:

a) Dla $a_n = \left(\dfrac{\sin(n^2+2)}{n+1}, \dfrac{2n+3}{4n+5}\right)$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (\ \ldots\ ,\ \ldots\ )$

b) Dla $b_n = \left(n \sin\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{n}{n+1}\right)$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$ ....

c) Dla $c_n = \left(\dfrac{n+1}{\sqrt{n+2}}, \dfrac{\sqrt{n+3}}{n+4}\right)$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n =$ ....

c4. Niech $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ i niech $a_n = (x_n, y_n)$, gdzie $x_n = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{n}$ i $y_n = \frac{1}{2n+3}$.

Wtedy granicą ciągu a_n jest para (..., ...), a granicą ciągu $f(a_n)$ jest liczba ....

Podaj przykłady ciągów $b_n = (x'_n, y'_n)$ zbieżnych do $(0, 0)$ takich, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -\pi$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = +\infty$

cK. Karol Omyłek (jak to Karol) wypowiedział **błędne** zdania. Jakie to są błędy?

a) Każdy rosnący i ograniczony ciąg punktów płaszczyzny jest zbieżny.

b) Jeżeli ciąg (x_n) ma podciąg zbieżny do π i ciąg (y_n) ma podciąg zbieżny do e, to ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem $a_n = (x_n, y_n)$, ma podciąg zbieżny do (π, e).