

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 4B

DEF. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Dla wektora $\vec{v} = [v_x, v_y]$, $|\vec{v}| = 1$ określamy *pochodną kierunkową f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora \vec{v}* wzorem

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

SPOSTRZEŻENIE. Oczywiście: $f'_{[1,0]}(x, y) = \dots\dots\dots$, $f'_{[0,1]}(x, y) = \dots\dots\dots$.

PRZYKŁAD E. Dla $f(x, y) = xy^2$ i $\vec{v} = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ mamy

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \frac{1}{2}t)(y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}t)^2 - x_0 y_0^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \frac{1}{2}t)(y_0^2 + \sqrt{3}t y_0 + \frac{3}{4}t^2) - x_0 y_0^2}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_0 y_0^2 + x_0 \sqrt{3}t y_0 + x_0 \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t y_0^2 + \frac{1}{2}t \sqrt{3}t y_0 + \frac{1}{2}t \frac{3}{4}t^2 - x_0 y_0^2}{t} = \frac{1}{2}y_0^2 + \sqrt{3}x_0 y_0. \end{aligned}$$

Ogólnie: zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + t \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y) - f(x_0, y_0)}{t} &= \\ &= \frac{f(x_0 + t \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y) - f(x_0, y_0 + t \cdot v_y)}{t} + \frac{f(x_0, y_0 + t \cdot v_y) - f(x_0, y_0)}{t} = \\ &= \frac{f(x_0 + t \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y) - f(x_0, y_0 + t \cdot v_y)}{t \cdot v_x} \cdot \dots + \frac{f(x_0, y_0 + t \cdot v_y) - f(x_0, y_0)}{\dots\dots\dots} \cdot \dots = \\ &= \{ \text{z tw. L ... istnieją } \bar{t}, \hat{t} \text{ pomiędzy } 0 \text{ i } t \} = \\ &= f'_x(x_0 + \hat{t} \cdot v_x, y_0 + t \cdot v_y) \cdot \dots + f'_y(x_0, y_0 + \bar{t} \cdot v_y) \cdot \dots \end{aligned}$$

dalej, przy założeniu, przy $t \rightarrow 0 \downarrow$ (wtedy też $\bar{t}, \hat{t} \rightarrow 0$)
 że f'_x i f'_y są ciągłe:
 $\dots\dots \cdot v_x + \dots\dots \cdot v_y$.

Zatem mamy:

Tw. Gdy f jest klasy \mathcal{C}^1 , to $f'_{\vec{v}} = f'_x \cdot v_x + f'_y \cdot v_y$.

Innymi słowy:

Tw. Gdy f jest klasy \mathcal{C}^1 , to $f'_{\vec{v}} = \text{grad } f \circ \vec{v}$.

W powyższym użyto nowych oznaczeń:
 $\text{grad } f := (f'_x, f'_y)$, f jest klasy \mathcal{C}^1 oznacza, że f ma ciągle pochodne cząstkowe.

PRZYKŁAD F. Dla $f(x, y) = x^2 y^3$ i $\vec{v} = [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$ mamy

$$f'_{\vec{v}}(x, y) = \text{grad } f \circ \vec{v} = (\dots\dots , \dots\dots) \circ \dots\dots\dots = \frac{6}{5}xy^3 + \frac{12}{5}x^2y^2.$$

Tw. Niech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $p_0 = (x_0, y_0)$ oraz $\text{grad} f(p_0) \neq (0, 0)$.

Wtedy

- a) z punktu p_0 funkcja f rośnie najszybciej w kierunku wektora $\text{grad} f(p_0)$,
- b) z punktu p_0 funkcja f maleje najszybciej w kierunku wektora $-\text{grad} f(p_0)$,
- c) w punkcie p_0 wektor $\text{grad} f(p_0)$ jest prostopadły do poziomuicy $\{p : f(p) = f(p_0)\}$.

D-D. Dla wektora jednostkowego \vec{v} niech γ oznacza kąt pomiędzy \vec{v} i $\text{grad} f(p_0)$. Dalej wystarczy zinterpretować wartość $f'_{\vec{v}}(p_0) = \vec{v} \circ \text{grad} f(p_0) = \|\text{grad} f(p_0)\| \cdot \cos \gamma$.

ZADANIE. (nieco trudniejsze) Punkt $p_0 = (1, 2)$ leży na linii $L \subset \mathbb{R}^2$ o równaniu $4 = \sqrt{27 - x^3 - y^3 - xy}$. Znaleźć równie stycznej do L w punkcie p_0 .

Zauważmy, że L jest poziomica funkcji $f(x, y) = \sqrt{27 - x^3 - y^3 - xy}$. Mamy:
 $\text{grad} f = \left(\frac{-3x^2 - y}{2\sqrt{27 - x^3 - y^3 - xy}}, \frac{-3y^2 - x}{2\sqrt{27 - x^3 - y^3 - xy}} \right)$ i $\text{grad} f(p_0) = \text{grad} f(1, 2) = \left(\frac{-5}{8}, \frac{-13}{8} \right)$.

Stąd punkt (x, y) leży na szukanej stycznej gdy (na podstawie punktu c))
wektory $(x - 1, y - 2)$, $\left(\frac{-5}{8}, \frac{-13}{8} \right)$ są prostopadłe,

czyli gdy

$$(x - 1, y - 2) \circ \left(\frac{-5}{8}, \frac{-13}{8} \right) = 0,$$

skąd odpowiedź:

$$5(x - 1) + 13(y - 2) = 0.$$

A na deser:

Zagadka: czy prosta (w \mathbb{R}^3): $5(x - 1) + 13(y - 2) = 0$, $z = 4$ leży na płaszczyźnie stycznej do f w punkcie p_0 ? Czy to trzeba rachować?

* * *

DEF. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i (x_0, y_0) leży we wnętrzu $D \subset \mathbb{R}^2$. Mówimy, że f jest różniczkowalna w (x_0, y_0) , gdy istnieją takie stałe A, B , że

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - (f(x_0, y_0) + A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Gdy f jest różniczkowalna, to $A = f'_x(x_0, y_0)$ i $B = f'_y(x_0, y_0)$;
pochodną Df można utożsamiać z gradientem: $\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} (f'_x, f'_y)$ (inaczej: grad f).

DEF*. (Dokładniej i ogólniej.) Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ i p_0 leży we wnętrzu $D \subset \mathbb{R}^m$. Przekształcenie liniowe $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest pochodną $(Df)(p_0)$, gdy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(p_0 + h) - (f(p_0) + \Phi(h))\|}{\|h\|} = 0.$$

Tw. Gdy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągle pochodne cząstkowe, to f jest różniczkowalna.

DOWÓD. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - (f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} - f'_x(x_0, y_0) \right| \cdot \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \\ & \quad + \left| \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} - f'_y(x_0, y_0) \right| \cdot \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \end{aligned}$$

z tw. Lagrange'a istnieją $s, t \in (0, 1)$ takie, że

$$\begin{aligned} & = |f'_x(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0)| \cdot \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \\ & \quad + |f'_y(x_0, y_0 + s \cdot \Delta y) - f'_y(x_0, y_0)| \cdot \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq |f'_x(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0)| \cdot 1 + |f'_y(x_0, y_0 + s \cdot \Delta y) - f'_y(x_0, y_0)| \cdot 1$$

co, przy założeniu, że f'_x i f'_y są ciągłe, daje

$$\xrightarrow{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0. \quad \square$$

Tw. Gdy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to jest ciągła.

UWAGA. Istnieją funkcje nieciągłe, których pochodne cząstkowe wszędzie istnieją, np.: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, dla $(x, y) \neq (0, 0)$ i $f(0, 0) = 0$ (sprawdź).

Istnieją nawet takie funkcje nieciągłe, które mają wszystkie pochodne kierunkowe.

