

### ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOTATKI Z WYKŁADU 5A

Pochodne cząstkowe  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami z podzbiorów  $\mathbb{R}^2$  w  $\mathbb{R}$ , zatem można je dalej różniczkować; każdą i po  $x$ , i po  $y$ .

Np. dla  $f(x, y) = 3x^4y^2$  mamy:

$$f'_x(x, y) = 12x^3y^2, \quad f'_y(x, y) = 6x^4y$$

oraz

$$f''_{xx}(x, y) = 36x^2y^2, \quad f''_{yx}(x, y) = 24x^3y, \quad f''_{xy}(x, y) = 24x^3y, \quad f''_{yy}(x, y) = 6x^4$$

Można też liczyć pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$$f'''_{xxx}(x, y) = 72xy^2, \quad f'''_{yxx}(x, y) = 72x^2y, \quad f'''_{xyx}(x, y) = \dots, \quad f'''_{\dots}(x, y) = \dots, \\ f'''_{\dots}(x, y) = 72xy^2, \dots \quad (\text{Ile ich jest?})$$

To nie przypadek, że wiele jest równych, bowiem

Tw. Gdy  $f$  jest klasy  $C^2$ , czyli ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, to pochodne mieszane są równe, czyli  $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$ .

W innej notacji:

Tw. (SCHWARZA) Dla  $f \in C^2$  mamy  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

Z tego twierdzenia wynikają równości pochodnych mieszanych wyższych rzędów (przy założeniu ich ciągłości). W szczególności dla funkcji **dwóch** zmiennych:

dla f-cji  $f \in C^3$  mamy (co najwyżej) cztery różne pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \dots \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = \dots \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

dla f-cji  $f \in C^4$  mamy (co najwyżej) pięć różnych pochodnych cząstkowych rzędu czwartego:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = \dots \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \dots \\ \dots \\ \dots$$

UWAGA. Istnieją funkcje, których pochodne mieszane nie są równe. Mianowicie:

$$\text{Wprost z definicji obliczmy } f''_{yx}(0,0) \text{ i } f''_{xy}(0,0) \text{ dla } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Potrzebne będą pochodne pierwszego rzędu:

oczywiście  $f'_x(0,0) = \dots = f'_y(0,0)$  (bo .....

poza  $(0,0)$  obliczamy (ze wzorów):  $f'_x(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $f'_y(x,y) = \frac{x(\dots)}{(x^2 + y^2)^2}$ .

Drugie pochodne mieszane w  $(0,0)$  wyznaczamy wprost z definicji (licząc przyrosty wyznaczonych poprzednio pierwszych pochodnych):

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,0+h) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dots - \dots}{h} = \dots,$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f'_{\dots}(\dots, \dots) - f'_{\dots}(\dots, \dots)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\dots - \dots}{s} = \dots.$$

Zatem .....

Podobnie jest dla funkcji trzech lub więcej zmiennych. ....

.....  
.....  
.....  
.....