Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 5b

Przykład. Niech $\Phi = \Phi(m,r) = G\dfrac{M\cdot m}{r^2}$.

Okazuje się jednak, że m, r nie są zmiennymi wolnymi,
są funkcjami pewnej zmiennej t, czyli: $m = m(t)$ oraz $r = r(t)$.

Wtedy $F = F(t) = \Phi\left(m(t), r(t)\right) = G\dfrac{M\cdot m(t)}{\left(r(t)\right)^2}$.

Prolem(ik). Jak wyznaczyć $F' = \frac{dF}{dt}$?

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} =$$

$$= \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{h} + \frac{G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} =$$

$$= \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{m(t+h)-m(t)}\cdot\frac{m(t+h)-m(t)}{h} + \frac{G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{r(t+h)-r(t)}\cdot\frac{r(t+h)-r(t)}{h}$$

$$\underset{h\to 0}{\to} \quad \Phi'_m \cdot m' + \Phi'_r \cdot r'$$

Jest to przykład (najprostszej?) reguły łańcucha.

Inną wersję reguły łancucha dostajemy w nieco ogólniejszej sytuacji:

Gdy $F = F(t,x,y) = \Phi\left(m(t,x,y), r(t,x,y)\right)$, to F ma **trzy** pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},\ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial x} + \text{...........}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial y} + \text{...........}$$

Gdyby M nie było stałą, np. $M = M(t,x,y)$, to $\Phi = \Phi(M,m,r)$.
Wtedy wygodnie jest myśleć, że funkcje m, r formalnie też zależą od x, y (nie tylko od t). Teraz złożenie zależy od trzech zmiennych:

$$F = F(t,x,y) = \Phi\left(M(t,x,y), m(t,x,y), r(t,x,y)\right)$$

i mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Tw. Niech $f(x,y,z),\ x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)$ będą klasy $\mathcal{C}^1$.
Wtedy dla $$F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$
mamy:
$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}.$$

D-d. (szkic dowodu pierwszego wzoru):
$$\frac{f(x(s+h,t),y(s+h,t),z(s+h,t))-f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))}{h} = \qquad \{\text{dalej trik: } +cosik - cosik...\}$$
$$= \frac{f(x(s+h,t),y(s+h,t),z(s+h,t))-f(x(s,t),y(s+h,t),z(s+h,t))}{x(s+h,t)-x(s,t)}\cdot\frac{x(s+h,t)-x(s,t)}{h}+$$
$$+\frac{f(x(s,t),y(s+h,t),z(s+h,t))-f(x(s,t),y(s,t),z(s+h,t))}{y(s+h,t)-y(s,t)}\cdot\frac{y(s+h,t)-y(s,t)}{h}+$$
$$+\frac{f(x(s,t),y(s,t),z(s+h,t))-f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))}{z(s+h,t)-z(s,t)}\cdot\frac{z(s+h,t)-z(s,t)}{h}$$
$$\underset{h\to 0}{\to} f'_x(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot x'_s(s,t)+$$
$$+f'_y(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot y'_s(s,t)+$$
$$+f'_z(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot z'_s(s,t).$$
Szczegóły uzupełniają: tw. Lagrange'a i założenia ciągłości. □

Przykład. Niech $f(x,y,z) = x+xy^2z^3,\ x(s,t) = s+t^2,\ y(s,t) = s^2-t,\ z(s,t) = st$ i $F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$. Można podstawić i żmudnie obliczać F'_s i F'_t, ALE powyższa reguła pozwala niemal automatycznie podać:
$$F'_s = f'_x\cdot x'_s + f'_y\cdot y'_s + f'_z\cdot z'_s = (1+y^2z^3)\cdot(1) + (2xyz^3)\cdot(2s) + (3xy^2z^2)\cdot(t) =$$
i dalej wstawiamy za x, y, z:
$$= (1+(s^2-t)^2(st)^3) + 2(s+t^2)(s^2-t)(st)^3\cdot 2s + 3(s+t^2)(s^2-t)^2(st)^2\cdot t,$$
$$F'_t = \text{............} \ .$$

Przykład. Niech $z = ue^v + ve^{-u};\ u = \ln r,\ v = s\cdot\ln r$. Wtedy
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} = (e^v - ve^{-u})\cdot\frac{1}{r} + (ue^v + e^{-u})\cdot\frac{s}{r} = \ ......$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s} = (e^v - ve^{-u})\cdot 0 + (ue^v + e^{-u})\cdot\ln r = \ ......$$

Tw. Niech $f(x_1,\ldots,x_k)$ i $x_1(t_1,\ldots,t_n),\ldots,x_k(t_1,\ldots,t_n)$ będą funkcjami klasy $\mathcal{C}^1$.
Wtedy złożenie $F(t_1,\ldots,t_n) = f\left(x_1(t_1,\ldots,t_n),\ldots,x_k(t_1,\ldots,t_n)\right)$ jest też klasy $\mathcal{C}^1$ o pochodnych cząstkowych:
$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t_1}\ ,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial t_n} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t_n}\ .$$
□

Regułę łańcucha wygodniej jest zanotować rachunkiem macierzowym, co pomijamy.