Analiza matematyczna 3. Notatki 6a (wersja poprawiona[1])

Przykład A. Liczbę $A = \sqrt{4.01^2 + 3.02^2}$ można przybliżyć przez $\sqrt{4^2+3^2} = 5 \approx A$.

Można też inaczej:

Niech $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Wartość $A = f(4.01, 3.02)$ można przybliżyć z równania płaszczyzny stycznej do f w punkcie $(4,3)$, tzn.

Obliczamy $f'_x(4,3) = \frac{2\cdot x}{2\sqrt{x^2+y^2}}|_{(4,3)} = 0.8$, $f'_y(4,3) = \frac{2\cdot y}{2\sqrt{x^2+y^2}}|_{(4,3)} = 0.6$ i równanie

płaszczyzny stycznej: $\qquad z = 5 + 0.8\cdot(x-4) + 0.6\cdot(y-3).$

Dalej traktujemy prawą stronę jako wzór funkcji $z = z(x,y)$, skąd mamy:

$$A \approx z(4.01, 3.02) = 5 + 0.8\cdot(4.01-4) + 0.6\cdot(3.02-3) = 5.02\ .$$

Żadna z tych dwóch odpowiedzi nie jest satysfakcjonująca, bo NIC nie powiedzieliśmy jak duży błąd może skrywać się pod wężykiem ($\approx$). Wyniknie to z poniższego

Tw. (Taylora, rzędu 2) Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0,y_0)(x,y) \subseteq \mathbb{R}^2$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x},\hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + R_2,$$

gdzie $R_2 = \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(\hat{x},\hat{y})\cdot(x-x_0)^2 + 2f''_{yx}(\hat{x},\hat{y})\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + f''_{yy}(\hat{x},\hat{y})\cdot(y-y_0)^2\right).$

Przykład A. c.d. Zauważmy:

$f(4.01, 3.02) = f(4,3) + f'_x(4,3)\cdot(4.01-4) + f'_y(4,3)\cdot(3.02-3) + R_2$, czyli $A = 5.02 + R_2$.

Zatem informacja o błędzie kryje się w R_2, bo $\quad |A - 5.02| = |R_2| = |\text{błąd}|$.

Obliczmy $f''_{xx} =$ ...... $= \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$, $f''_{yy} =$ ...... $= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$, $f''_{xy} = \ldots = \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$,

niestety nie wiemy dokładnie w jakim punkcie je liczyć; pozostaje szacowanie:

$$|\text{błąd}| = |R_2| = \frac{1}{2}\left|f''_{xx}(\hat{x},\hat{y})\cdot 0.01^2 + 2f''_{yx}(\hat{x},\hat{y})\cdot 0.01\cdot 0.02 + f''_{yy}(\hat{x},\hat{y})\cdot 0.02^2\right| \leq$$

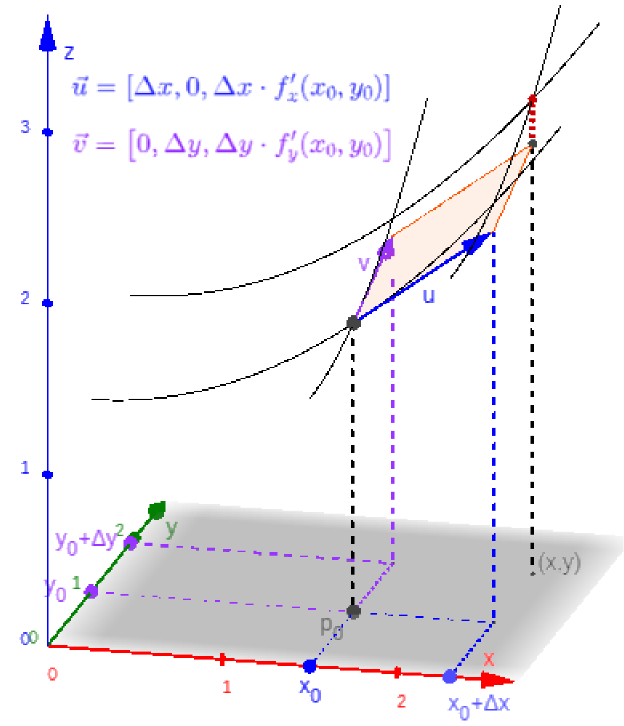
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{y}^2}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}^3}\cdot 0.01^2 + 2\frac{|\hat{x}\hat{y}|}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}^3}\cdot 0.01\cdot 0.02 + \frac{\hat{x}^2}{\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}^3}\cdot 0.02^2\right) \leq \overbrace{\text{nier. tr.}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{3.02^2}{5^3}\cdot 0.01^2 + 2\frac{4.01\cdot 3.02}{5^3}\cdot 0.01\cdot 0.02 + \frac{4.01^2}{5^3}\cdot 0.02^2\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{4^2}{5^3}\cdot\frac{1}{10^4} + 2\frac{5\cdot 4}{5^3}\cdot\frac{2}{10^4} + \frac{5^2}{5^3}\cdot\frac{4}{10^4}\right) = \frac{196}{2\cdot 5^3\cdot 10^4} = \frac{196\cdot 4}{2^3\cdot 5^3\cdot 10^4} \leq \frac{800}{10^7} = \frac{8}{10^5} < \frac{1}{10^4}.$$

Zatem owe przybliżenie płaszcz. styczną daje $A \approx 5.02$ z błędem mniejszym od 10^{-4}.

[1] poprawiony został wzór ogólny (na dole ostatniej strony)



Pytania kontrolne.

(i) Czym jest Δx (z rysunku) w sformułowaniu twierdzenia?

(i) Jakiego koloru jest odcinek o długości R_2?

Tw. (Taylora, rzędu 3) Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^{\cdots}$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0,y_0)(x,y) \subseteq \mathbb{R}^{\cdots}$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x},\hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x\,\Delta x + f'_y\,\Delta y + \tfrac{1}{2}\left(f''_{xx}\,\Delta x^2 + 2f''_{yx}\,\Delta x\Delta y + f''_{yy}\,\Delta y^2\right) + R_3,$$

gdzie $\Delta x =$ ...... , $\Delta y =$ i

$$R_3 = \tfrac{1}{3!}\left(f'''_{xxx}\,\Delta x^3 + \;\dots\; f'''_{yxx}\,\Delta x^2\Delta y + \;\dots\; f'''_{yyx}\,\Delta x\Delta y^2 + f'''_{yyy}\,\Delta y^3\right),$$

gdzie pochodne cząstkowe rzędu trzeciego są liczone w $(\hat{x},\hat{y})$, a pozostałe w (x_0,y_0).

Dowód. (szkic)

Określamy funkcję JEDNEJ zmiennej $F(t) = f(x_0 + t\cdot\Delta x, y_0 + t\cdot\Delta y)$, dla $t \in [0,1]$.

Z tw. Taylora dla funkcji jednej zmiennej wynika istnienie $\hat{t} \in (0,1)$ takiego, że

$$F(1) = F(0) + F'(0)\cdot(1-0) + \tfrac{1}{2!}\cdot F''(0)\cdot(1-0)^2 + \tfrac{1}{3!}\cdot F'''(\hat{t})\cdot(1-0)^3, \qquad (*)$$

czyli

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \tfrac{1}{2!}\cdot F''(0) + \tfrac{1}{3!}\cdot F'''(\hat{t}).$$

Dalej wystarczy wyznaczyć (z reguły ....) wartości pochodnych:

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\;\dots\dots\; + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\;\dots\dots\; = f'_x\cdot\;\dots\dots\; + f'_y\cdot\;\dots\dots\;.$$

$$F''(t) = \frac{\partial\left(f'_x\cdot\Delta x + f'_y\cdot\Delta y\right)}{\partial t} = \frac{\partial f'_x}{\partial t}\cdot\Delta x + \frac{\partial f'_y}{\partial t}\cdot\Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial f'_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f'_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\Delta x + \left(\frac{\partial f'_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f'_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\Delta y =$$

$$= \left(f''_{xx}\cdot\Delta x + f''_{yx}\cdot\;\dots\dots\;\right)\cdot\Delta x + \left(f''_{xy}\cdot\Delta x + f''_{yy}\cdot\;\dots\dots\;\right)\cdot\Delta y =$$

$$= f''_{xx}\cdot(\Delta x)^2 + 2\cdot f''_{yx}\cdot\Delta x\cdot\Delta y + f''_{yy}\cdot(\Delta y)^2$$

$$F'''(t) = \frac{\partial f''_{xx}}{\partial t}\cdot(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial f''_{yx}}{\partial t}\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \frac{\partial f''_{yy}}{\partial t}\cdot(\Delta y)^2 =$$

$$= \left(\tfrac{\partial f''_{xx}}{\partial x}\cdot\tfrac{\partial x}{\partial t} + \tfrac{\partial f''_{xx}}{\partial y}\cdot\tfrac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot(\Delta x)^2 + 2\left(\tfrac{\partial f''_{yx}}{\partial x}\cdot\tfrac{\partial x}{\partial t} + \tfrac{\partial f''_{yx}}{\partial y}\cdot\tfrac{\partial y}{\partial t}\right)\cdot\Delta x\Delta y + (\;\dots\dots\dots\dots\;)\cdot(\dots)^2$$

$$= f'''_{xxx}\cdot(\Delta x)^3 + \;\dots\dots\dots\dots\; + \;\dots\dots\dots\dots\; + \;\dots\dots\dots\dots\;.$$

Wstawiając powyższe do wzoru (*) i przyjmując $\hat{x} = x_0 + \;\dots\;\cdot\Delta x$, $\hat{y} = \;\dots\; + \;\dots\;\cdot\;\dots$, mamy tezę. $\square$

TW. (Taylora, rzędu n) Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^{\cdots}$ w obszarze zawierającym odcinek $(x_0,y_0)(x,y) \subseteq \mathbb{R}^{\cdots}$. Wtedy istnieje punkt $(\hat{x},\hat{y})$ tego odcinka taki, że

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial y^i \, \partial x^{k-i}} \cdot (y-y_0)^i (x-x_0)^{k-i} \right),$$

gdzie pochodne cząstkowe rzędu n są liczone w $(\hat{x},\hat{y})$, a pozostałe w (x_0,y_0).

UWAGA. Prawa strona wzoru, pomijając składniki przy $k = n$, jest wielomianem zmiennych x i y; nazwijmy go $w(x,y)$. Jest to wielomian stopnia .... Ma on wiele wspólnego z funkcją f w punkcie (x_0,y_0). CO ma wspólne?

ODP. Wspólne są: wartość i wartości wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu $\leq n-1$ (w punkcie (x_0,y_0)).

UWAGA. Napis: $f(x_0,y_0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial y^i \, \partial x^{k-i}} \cdot (y-y_0)^i (x-x_0)^{k-i} \right)$ nazywamy szeregiem Taylora funkcji f w punkcie (x_0,y_0). Oczywiście ma on sens jedynie dla funkcji, która ma pochodne cząstkowe wszystkich rzędów.

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, można pytać:
- Kiedy szereg Taylora jest zbieżny? (dla jakich punktów (x,y)?)
- Jeśli jest zbieżny dla pewnego (x,y), to czy jego suma jest równa $f(x,y)$?
- Jeśli jest zbieżny dla pewnego (x,y), to 'jak szybko' jest zbieżny?

Pomijamy tu tą tematykę.

* * *

TW. (wzór Taylora; ogólnie) Niech $p = (x_1,\ldots,x_m)$, $\bar{p} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m) \in D \subseteq \mathbb{R}^m$.
Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^n$ w otoczeniu odcinka $p\bar{p} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^m$.
Wtedy istnieje punkt $\hat{p} = (\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_m)$ tego odcinka taki, że

$$f(p) = f(\bar{p}) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_k \leq m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} \cdot (x_{i_k} - \bar{x}_{i_k}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_1} - \bar{x}_{i_1}) \right),$$

gdzie pochodne cząstkowe rzędu n (najwyższe) są liczone w $\hat{p} = (\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_m)$, a pozostałe w $\bar{p} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m)$.

PYTANIA KONTROLNE. Porównaj ogólne sformułowanie z poprzednimi:
(i) Co tu jest odpowiednikiem punktu (x_0,y_0)? A punktu (x,y)? A punktu $(\hat{x},\hat{y})$?
(ii) Gdzie tu jest 'schowana' tzw. reszta R_n ?
(iii) Dlaczego tu nie ma nigdzie symbolu Newtona?