Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 6b

Def. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$. Mówimy, że

f osiąga (ma) w p_0 *lokalne maksimum*, gdy $\underset{\delta>0}{\exists} \underset{\substack{||p-p_0||<\delta \\ p\in D}}{\forall} f(p) \leq f(p_0)$,

f osiąga (ma) w p_0 *lokalne minimum*, gdy $\underset{\delta>0}{\exists} \underset{\substack{||p-p_0||<\delta \\ p\in D}}{\forall} f(p) \geq f(p_0)$.

Jeśli w powyższym dla $p \neq p_0$ zachodzi nierówność ostra, to mówimy, że f ma w p_0 lokalne ekstremum *właściwe*.

Uwaga. Przy TEJ definicji funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2$ ma w $p_0 = (1,4)$ zarówno maksimum lokalne, jak i minimum lokalne!

Przykład 0. Funkcja $f(x,y) = \begin{cases} 3-|x| & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ p & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

dla $p = 1$ ma w $(0,0)$ lokalne ...... , (Jakie wziąć δ w definicji? Odp. δ ... .)
Dla $p = 5$ ma w $(0,0)$ lokalne ...... , (Jakie wziąć δ w definicji? Odp. δ ... .)

Ogólnie:
- dla $p \in \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie zbioru $\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ maksimum lokalne,

ponadto:
- dla $p \geq$ ... ma w $(0,0)$ maksimum lokalne,
- dla $p <$ ... ma w $(0,0)$ minimum lokalne.

Tw. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ osiąga lokalne ekstremum w $p_0 = (x_0,y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Jeśli istnieje $f'_x(p_0)$, to jest równa 0. Jeśli istnieje $f'_y(p_0)$, to jest równa 0.

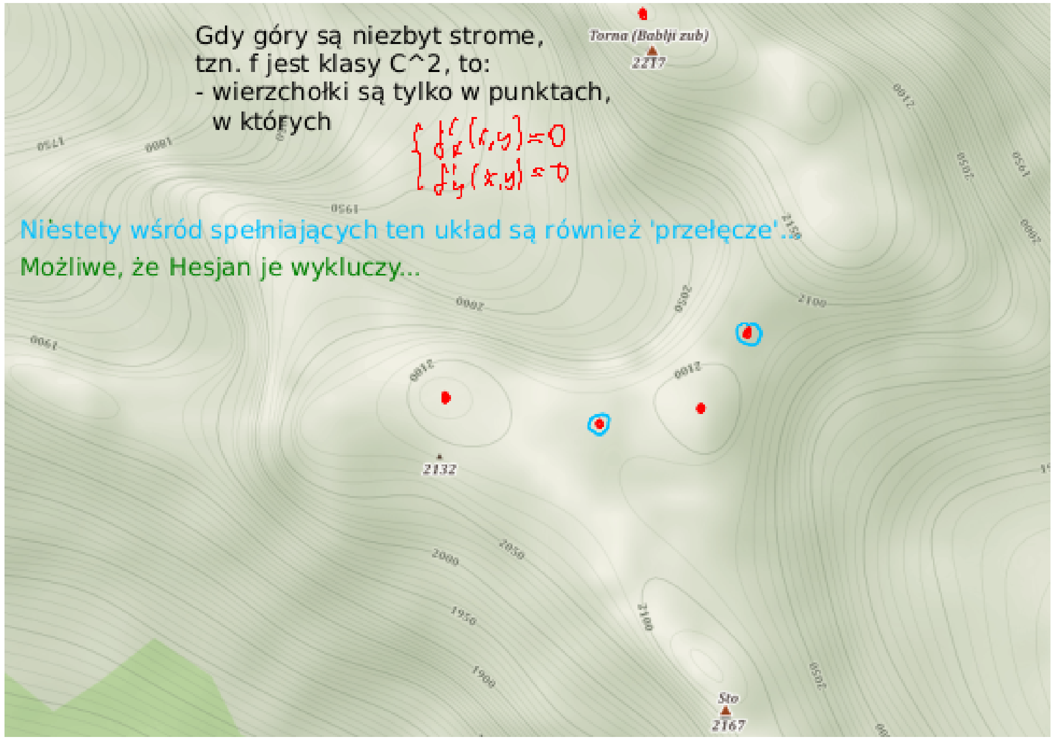
Dowód. Wystarczy zbadać obcięcia: $f|_{(\mathbb{R}\times\{y_0\})\cap D}$ i $f|_{(\{x_0\}\times\mathbb{R})\cap D}$.

Wniosek. Gdy $f : D \to \mathbb{R}$ ma wszędzie obie pochodne cząstkowe, to może mieć ekstremum lokalne tylko w punktach spełniających układ równań $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$.

Uwaga. Dla funkcji o większej liczbie zmiennych zachodzą analogiczne stwierdzenia.

Przykład 1.
Dla $f(x,y) = x^3 - x + y^3$ mamy $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ 3y^2 = \ldots \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{3} \\ y = \ldots \end{cases}$

czyli **jeśli** f ma ekstremum lokalne, **to** jedynie w którymś z punktów $p_1 = (\ \ldots\ ,\ \ldots\ )$, $p_2 = (\ \ldots\ ,\ \ldots\ )$, albo w obu. NA RAZIE wiemy tylko/aż tyle.



Twierdzenie. (warunek wystarczający istnienia lokalnego ekstremum)
Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$ w otoczeniu $p_0 = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ oraz $f'_x(p_0) = 0$ i $f'_y(p_0) = 0$. Niech $H := \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(p_0) & f''_{yx}(p_0) \\ f''_{xy}(p_0) & f''_{yy}(p_0) \end{pmatrix}$ (zwany hesjanem). Wtedy:

jeśli $H > 0$ i $f''_{xx}(p_0) > 0$, to f osiąga minimum lokalne w p_0,

jeśli $H > 0$ i $f''_{xx}(p_0) < 0$, to f osiąga maksimum lokalne w p_0,

jeśli $H < 0$, to f nie ma ekstremum lokalnego w p_0,

Jeśli $H = 0$, to twierdzenie to **nie rozstrzyga**, czy f ma ekstremum lokalne w p_0.

Dowód. (idea) Zajmiemy się tylko przypadkiem: $H < 0$.

Znak różnicy wartości:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x \cdot (x - x_0) + f'_y \cdot (y - y_0) + R_2 = \quad \text{(z Tw. Taylora)}$$
$$= 0 + R_2 = \quad \text{(bowiem ....)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(f''_{xx} \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{yx} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy} \cdot (y - y_0)^2\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(y - y_0)^2 \left(f''_{xx} \cdot \left(\tfrac{x - x_0}{y - y_0}\right)^2 + 2f''_{yx} \cdot \left(\tfrac{x - x_0}{y - y_0}\right) + f''_{yy}\right)$$

zależy od znaku wyrażenia w nawiasie, które jest 'prawie funkcją kwadratową' zmiennej $\left(\frac{x - x_0}{y - y_0}\right)$. Wyróżnik (Δ) tej 'prawie funkcji kwadratowej' jest równy

$$(2 \cdot f''_{xy})^2 - 4 \cdot f''_{xx} \cdot f''_{yy} = -4(f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2) = -4 \det \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = -4H > 0.$$

Dla (x,y) bliskich (x_0,y_0) owa 'zmienna' $\left(\frac{x - x_0}{y - y_0}\right)$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste. (Np.: dla $(x,y) = (x_0 + \frac{\pi}{n}, y_0 + \frac{1}{n})$ owa 'zmienna' ma wartość ... .)
Zatem ta 'prawie funkcja kwadratowa' przyjmuje wartości i dodatnie, i ujemne. Czyli znak różnicy $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ dla pewnych (x,y) jest dodatni, a dla innych – ujemny.

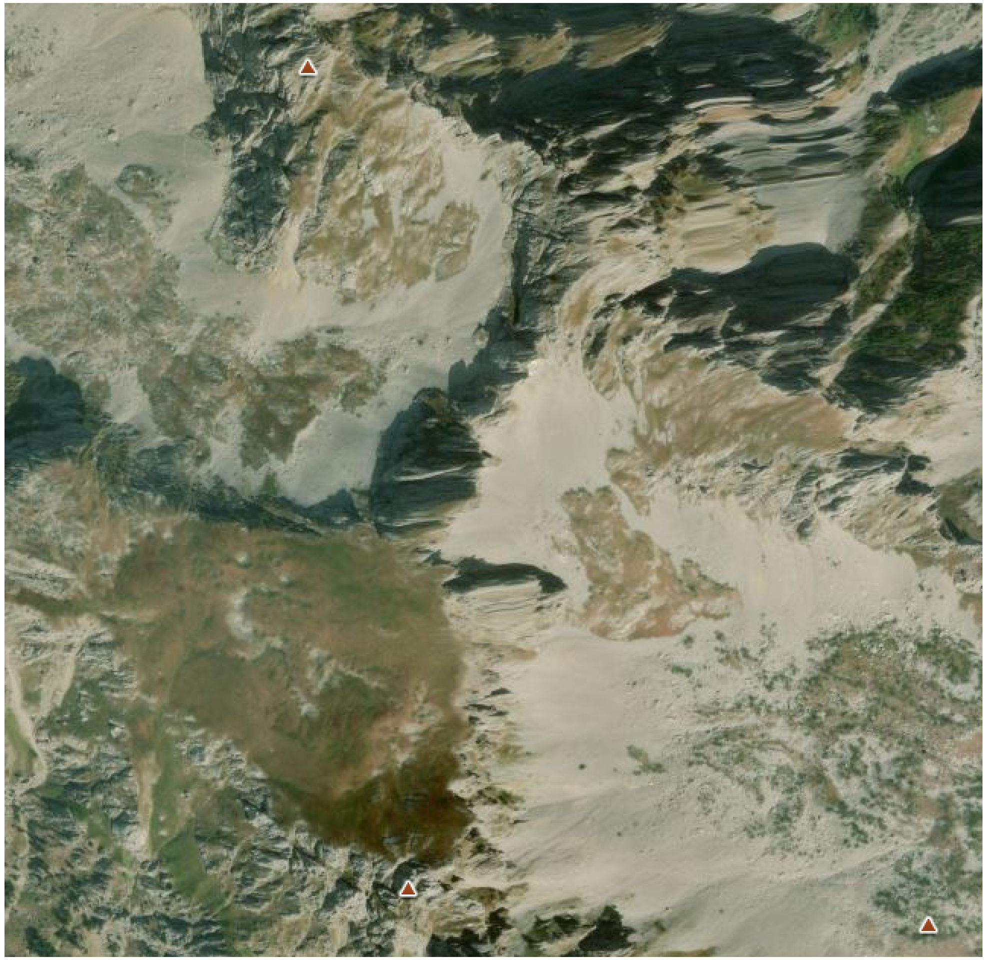
Zatem w pobliżu (x_0,y_0) są:
– zarówno punkty (x,y), w których wartości $f(x,y) > f(x_0,y_0)$,
– jak i punkty (x,y), w których wartości $f(x,y) < f(x_0,y_0)$.

Stąd f nie ma ekstremum lokalnego w (x_0,y_0).

Uwaga. Dlaczego powyższe nie jest dowodem?
Bo ....
Bo ....
....

.

Poprzednia mapa jest dużo bardziej czytelna od zdjęcia z góry (samolotowego):



Zadanie 2. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^3 - x + xy^2$.

Rozwiązanie. Funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^2$, więc ekstrema lokalne MOŻE mieć TYLKO w punktach spełniających układ równań:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2-1+y^2=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} y=\pm 1 \\ x=0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y=0 \end{cases} \right),$$

czyli w $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (0, -1)$, $p_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ lub $p_4 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Obliczmy hesjan: $H = \det \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 12x^2 - 4...^2$.

Dla $p_1 = (0, 1)$ i $p_2 = (0, -1)$ mamy $H = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1 < 0$, zatem f nie ma ekstremum lokalnego ani w p_1, ani w p_2.

Dla $p_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$: $H = \frac{12}{3} > 0$ i $f''_{xx}(p_3) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$, zatem f ma minimum lokalne w p_3.

Dla $p_4 = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$: $H = \frac{12}{3} > 0$ i $f''_{xx}(p_4) = \frac{-6}{\sqrt{3}} < 0$, zatem f ma maksimum lokalne w p_4.

Odp. f ma dwa ekstrema lokalne: minimum w $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \ ... \ )$ i maksimum w $(\ ...... \ , 0)$.

* * *

Przykład 3. Rozważmy funkcję $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 14$.

BEZ powyższego tw. można pokazać, że f ma jedyne ekstremum lokalne w $(2, 3)$, bo geometria mówi, że funkcja ta mierzy kwadrat odległości punktu (x, y) od $(2, 3)$ powiększony o 1 (zbliżając/oddalając się do/od $(2, 3)$ zmniejsza/zwiększa się wartość f).

BEZ geometrii TEŻ można obejść się bez owego twierdzenia (z hesjanem).
Mianowicie zauważmy, że:
$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + \text{coś} \geq 0^2 + 0^2 + \text{coś} = f(2, 3)$ (gdzie coś to stała!)
zatem f przyjmuje wartość najmniejszą w $(2, 3)$ (czyli jest to też minimum lokalne).
Jest to jedyny punkt zerujący obie pochodne $f'_x(x, y) = 2(x-2)$, $f'_y(x, y) = 2(y-3)$, więc f nie ma innych ekstremów lokalnych.

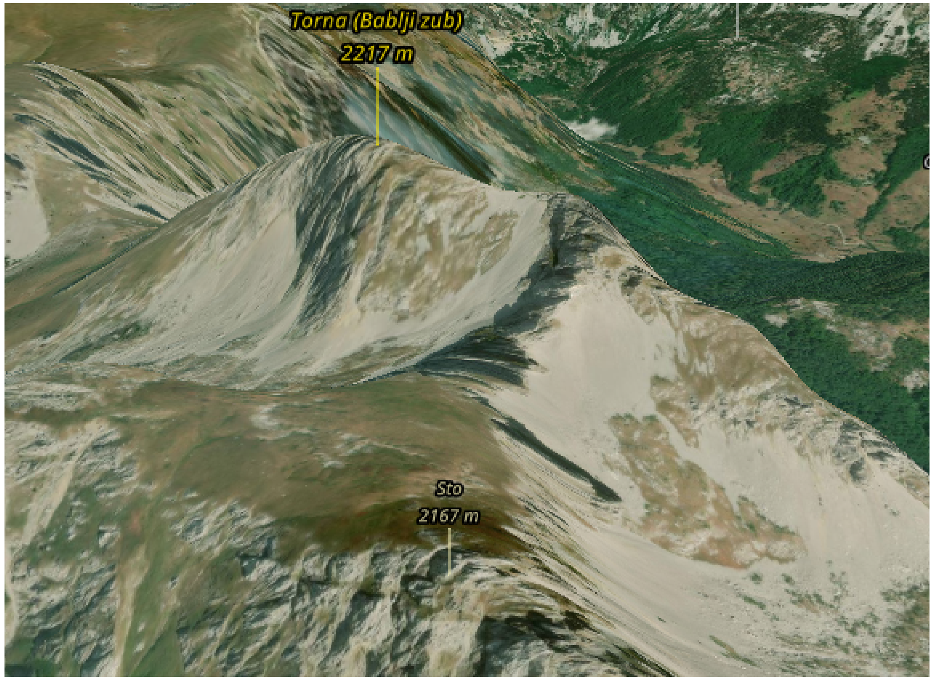
* * *

Przykład 1. (raz jeszcze) Dla funkcji $f(x, y) = x^3 - x + y^3$
BEZ rachunków można pokazać, że nie ma ekstremów lokalnych (zob. $f|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}}$).

Podobnie dla $g(x, y) = x^5(2 + \sin y)$, $h(x, y, z) = z^3 2^{xy}$.

* * *

Gdy (niebanalny) algorytm przerobi je na zdjęcie z perspektywy, to efekt jest bardziej czytelny.



Mapa i powyższe zdjęcia pochodzą z portalu `mapy.cz`.

Dla funkcji o większej liczbie zmiennych warunek wystarczający jest bardziej skomplikowany. Z pomocą przychodzi tu Sylwester z algebrą liniową (formą kwadratową).

TWIERDZENIE. (warunek wystarczający istnienia lokalnego ekstremum)
Niech $f: D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$ w otoczeniu punktu $\bar{p} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \in D \subset \mathbb{R}^m$ oraz $f'_{x_i}(\bar{p}) = 0$, dla każdego $i \leq m$. Niech H oznacza macierz Hessego drugich pochodnych cząstkowych f w punkcie $\bar{p}$:

$$H := \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(\bar{p}) & f''_{x_1x_2}(\bar{p}) & \cdots & f''_{x_1x_m}(\bar{p}) \\ f''_{x_2x_1}(\bar{p}) & f''_{x_2x_2}(\bar{p}) & \cdots & f''_{x_2x_m}(\bar{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_mx_1}(\bar{p}) & f''_{x_mx_2}(\bar{p}) & \cdots & f''_{x_mx_m}(\bar{p}) \end{bmatrix}$$

Wtedy:

jeśli H jest **dodatnio** określona, to f ma minimum lokalne (właściwe) w $\bar{p}$,
jeśli H jest **ujemnie** określona, to f ma maksimum lokalne (właściwe) w $\bar{p}$,
jeśli H jest **nieokreślona**, to f nie ma ekstremum lokalnego w $\bar{p}$.

W pozostałych przypadkach (H jest półdodatnio lub półujemnie określona i nie jest ani dodatnio, ani ujemnie określona), to twierdzenie to **nie rozstrzyga**, czy f ma ekstremum lokalne w p_0.

Gdy uwzględnimy jeden ze sposobów badania dodatniości/ujemności formy kwadratowej, to uzyskujemy niemal algorytm:

TWIERDZENIE. (warunek wystarczający istnienia lokalnego ekstremum)
Niech $f: D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$ w otoczeniu punktu $\bar{p} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \in D \subset \mathbb{R}^m$ oraz $f'_{x_i}(\bar{p}) = 0$, dla każdego $i \leq m$. Dla macierzy Hessego drugich pochodnych cząstkowych f w punkcie $\bar{p}$ wyznaczniki jej minorów głównych oznaczmy:

$$H_k := \det\left(\begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(\bar{p}) & f''_{x_1x_2}(\bar{p}) & \cdots & f''_{x_1x_k}(\bar{p}) \\ f''_{x_2x_1}(\bar{p}) & f''_{x_2x_2}(\bar{p}) & \cdots & f''_{x_2x_k}(\bar{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_kx_1}(\bar{p}) & f''_{x_kx_2}(\bar{p}) & \cdots & f''_{x_kx_k}(\bar{p}) \end{bmatrix}\right), \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, m.$$

Wtedy:

jeśli $H_1,\ H_1, \ldots, H_m > 0$, to f ma lokalne minimum właściwe w $\bar{p}$,
jeśli $(-1)^k \cdot H_k > 0$, dla każdego $k \leq m$, to f ma lokalne maksimum właściwe w $\bar{p}$.