Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 7a

Wartość największa (wartość najmniejsza) funkcji

Dla niektórych f-cji $f\colon D\to\mathbb{R}$ istnieje $p_g\in D$ takie, że $f(p)\le f(p_g)$, dla każdego $p\in D$.

Mówimy wtedy, że $f(p_g)$ jest wartością największą f, że f osiąga swój kres górny.

Analogicznie, f osiąga wartość najmniejszą w punkcie p_d, gdy ('znaczkami'):

$$\underset{p\in D}{\forall}\ f(p_d)\le f(p).$$

To samo innymi 'znaczkami':

$$f(p_d)=\inf f[D]=\inf\{f(p) : p\in D\}=\inf_{p\in D} f(p)=\inf_D f=\inf f.$$

Uwaga. Nie dla każdej funkcji istnieje wartość największa, ale kres górny wartości istnieje zawsze (może być równy $+\infty$), jak zobaczymy w poniższych przykładach:

- Dla $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, której dziedziną jest $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mamy:

  $\inf\limits_D f=0$ i f nie ma wartości najmniejszej, bo $0<f(x,y)$ i $f(n,0)=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$,

  $\sup\limits_D f=+\infty$ (bo $f(\frac{1}{n},0)=n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$) i oczywiście f nie ma wartości największej.

- Dziedziną funkcji $f(x,y)=2^{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ jest koło $K=\{(x,y) : x^2+y^2\le 1\}$. Oczywiście $f(x,y)\le 2^{\sqrt{1-0^2-0^2}}=2^1=f(0,0)$, zatem 2 jest wartością największą. Kres górny: $\sup f=2$ i jest on przyjęty tylko w punkcie $(0,0)$. Kres dolny: $\inf f=2^0=1$ jest osiągany w każdym punkcie brzegu K (na okręgu).

- Dla $f(x,y)=xy$ na $(0,1]^2$ oczywięcie mamy: $0<f(x,y)=xy\le 1\cdot 1=f(1,1)$, zatem $\sup\limits_{(0,1]^2} f=1$ i jest on przyjęty tylko w punkcie $(1,1)$. Natomiast $\inf\limits_{(0,1]^2} f=0$ (bo $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$) nie jest osiągnięty w żadnym punkcie $(0,1]^2$.

- Dla $f(x,y)=\arctan(1+x^2+y^2)$ mamy: $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f=\frac{\pi}{4}=f(0,0)$ oraz $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f=\frac{\pi}{2}$ (bo $f(n,0)=\arctan(1+n^2)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{\pi}{2}$) i nie jest osiągnięty w żadnym punkcie $\mathbb{R}^2$.

Twierdzenie Weierstrassa. (o osiąganiu [przyjmowaniu] kresów)
Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na zbiorze domkniętym i ograniczonym $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
Wtedy istnieją punkty $p_d, p_g \in D$ takie, że $f(p_d) \le f(p) \le f(p_g)$ dla każdego $p \in D$.

Dowód. Ograniczymy się do szukania takiego punktu p_g, że $f(p_g) = \sup f[D]$.
Oznaczmy $s := \sup f[D]$. Dla wygody przyjmijmy, że $D \subseteq \mathbb{R}^2_+$.

Popatrzmy na kwadraty jednostkowe o wierzchołkach w punktach kratowych $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Wśród nich jest taki kwadrat K_0, że $\sup f[K_0 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo ....).
Niech $p_0 = (k_0, \ell_0)$ oznacza lewy dolny wierzchołek K_0, dla pewnych $k_0, \ell_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat K_0.
Wśród nich jest taki kwadrat K_1, że $\sup f[K_1 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo ....).
Niech $p_1 = (k_0{,}k_1\ ,\ \ell_0{,}\ell_1)$ oznacza lewy dolny wierzchołek K_1, dla pewnych cyfr k_1, ℓ_1.

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat K_1.
Wśród nich jest taki kwadrat K_2, że $\sup f[K_2 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo ....).
Niech $p_2 = (k_0{,}k_1 k_2\ ,\ \ell_0{,}\ell_1\ell_2)$ oznacza lewy dolny wierzchołek K_2 (k_2, ℓ_2 to cyfry).

Popatrzmy na 100 mniejszych kwadratów wypełniających kwadrat K_2.
Wśród nich jest taki kwadrat K_3, że $\sup f[K_3 \cap D] = s$ (istnieje taki, bo ....).
Niech $p_3 = (k_0{,}k_1 k_2 k_3\ ,\ \ell_0{,}\ell_1\ell_2\ell_3)$ oznacza lewy dolny wierzchołek K_3 (k_3, ℓ_3 to cyfry).

... I tak dalej ...

Dostajemy nieskończony ciąg kwadratów $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$.
Ciąg (p_n) ich lewych dolnych wierzchołków jest zbieżny do punktu
$$\hat{p} = (k_0{,}k_1 k_2 k_3 \ldots\ ,\ \ell_0{,}\ell_1\ell_2\ell_3 \ldots).$$

Ponieważ $\operatorname{diam} K_n = \frac{\sqrt{2}}{10^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, więc $\{\hat{p}\} = K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap \ldots$.

Zauważmy, że $\hat{p} \in D$. Weźmy bowiem po punkcie $p'_n \in D \cap K_n$. Dostajemy ciąg (p'_n) z D, zbieżny do .... Ponieważ D jest .... , więc $\hat{p} \in D$.

Ciągłość f w $\hat{p}$ oznacza, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ istnieje $\delta_i > 0$ takie, że $|f(p) - f(\hat{p})| < \frac{1}{i}$, o ile $||p - \hat{p}|| < \delta_i$. Biorąc n_i takie, że $\frac{\sqrt{2}}{10^{n_i}} < \delta_i$, mamy:
$$|f(p) - f(\hat{p})| < \tfrac{1}{i}, \text{ dla wszystkich } p \in K_{n_i} \cap D.$$

Stąd $\left|\sup\limits_{K_{n_i} \cap D} f(p) - f(\hat{p})\right| \le \frac{1}{i}$, czyli $|s - f(\hat{p})| \le \frac{1}{i}$.

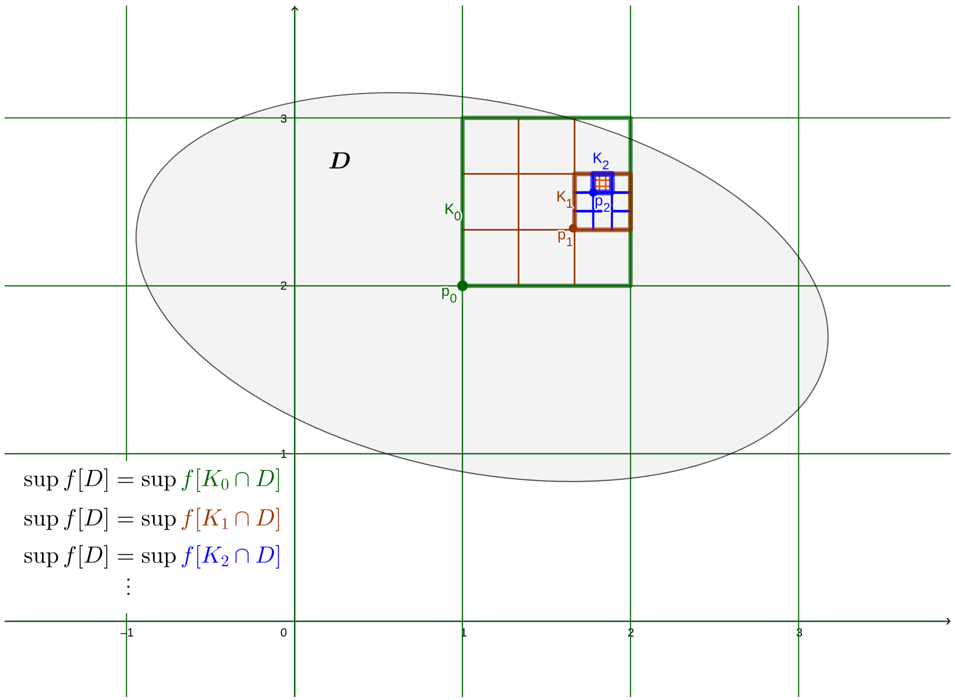
Ponieważ $\frac{1}{i}$ może być dowolnie małe, więc $|s - f(\hat{p})| = 0$, czyli $f(\hat{p}) = s = \sup f[D]$.
Zatem można przyjąć $p_g := \hat{p}$. $\square$

Uwaga. Dowód należy uzupełnić poniższymi zdaniami. W których miejscach?

(*) $\sup f[B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m] = \max\{\sup f[B_1], \sup f[B_2], \ldots, \sup f[B_m]\}$,

(**) ograniczoność D zapewnia, że D jest zawarte w <u>skończonej</u> sumie kwadratów.

Na poniższej ilustracji mamy podziały nie na 100, a na 9 mniejszych kwadratów.



Szukając wartości najmniejszej i największej funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, twierdzenie Weierstrassa daje nam informację, że 'JEST CZEGO SZUKAĆ', o ile f jest ciągła i określona na zbiorze domkniętym i ograniczonym $D \subseteq \mathbb{R}^n$, czyli na zbiorze zwartym.

W przypadku $f : D \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$ we wnętrzu D i gdy $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zwarte możemy postępować następująco:

Szukamy punkty krytyczne, tzn. takie, w których f <u>może</u> osiągać swe kresy:

1^o szukamy punkty krytyczne we wnętrzu D, czyli spełniające układ $\begin{cases} f'_x(p)=0 \\ f'_y(p)=0 \end{cases}$,

2^o szukamy punkty krytyczne na brzegu D (co zazwyczaj sprowadzamy do badania pomocniczych funkcji jednej zmiennej),

3^o tw. Weierstrassa gwarantuje, że wartość najmniejszą i wartość największą znajdziemy wśród wartości f w otrzymanych poprzednio punktach krytycznych. To zazwyczaj sprowadza się do porównania wartości funkcji w skończenie wielu punktach.

Uwaga. Punkty D, w których f nie ma pochodnych cząstkowych należy zaliczyć do punktów krytycznych (czasami nazywanych *stacjonarnymi*).

Przykład. Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie ograniczony przez linie: $x^2 + y = 1$, $x - y = 1$. Dla $f(x, y) = xy$ znaleźć $\sup\limits_D f$, $\inf\limits_D f$ i wszystkie punkty, w których są przyjjmowane.

1^o. Szukam p. kryt. we wnętrzu D (tu rys.!!!)

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, zatem $p_0 = (0, 0)$ jest jedynym p. krytycznym we wnętrzu D.

2^o. Szukam p. kryt. na brzegu D :

2^{o}a) Szukam p. kryt. na odcinku $(-2, -3)(1, 0)$:

Pomocnicza funkcja $a : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $a(s) = f(s, s-1) = s(s-1)$ jest fragmentem paraboli o wierzchołku w $s = \frac{1}{2}$. Poza wierzchołkiem a maleje/rośnie, zatem f na tym odcinka ma punkty krytyczne: $p_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ i końce: $p_2 = (-2, -3)$, $p_3 = (1, 0)$.

2^{o}b) Szukam p. kryt. na fragmencie paraboli $y = 1 - x^2$, $x \in [-2.1]$:

Pomocnicza funkcja $b : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $b(t) = f(t, 1-t^2) = t(1-t^2)$ ma pochodną $b'(t) = -3t^2 + 1$, która zeruje się dla $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Zatem f ma tu punkty krytyczne: $p_4 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$, $p_5 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$ i końce (które już uwzględniliśmy w 2^{o}a)).

3^o. D jest ograniczony (p.rys.) i (oczywiście) jest domknięty, więc (z tw. W.) f osiąga kresy na D, które znajdziemy porównując wartości jedynie w owych p. kryt.:

$f(0, 0) = 0$, $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(-2, -3) = 6$, $f(1, 0) = 0$, $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} < -\frac{2}{3\sqrt{4}} = -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} = f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

(Pozostałe zależności pomiędzy wartościami $f(p_k)$ są oczywiste.) Stąd ostatecznie:

Odp.: $\sup\limits_D f = 6 = f(-2, -3)$ oraz $\inf\limits_D f = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$.

Przykład. Niech $D=[-1,1]^2$ i $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=2xy+1$.
(Łatwiej zrobić 'chytrze' niż owym algorytmem — pomijam.)

Przykład. (może nieco zbyt żmudny?)
Dla $f(x,y)=2x^2y-x^3-y^2$ na trójkącie $T=\Delta(0,0)(1,0)(0,1)$ mamy:

1°. Szukam p. kryt. we wnętrzu T:

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy-3x^2=0 \\ 2x^2-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4y-3x)=0 \\ y=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=0 \\ y=0\end{cases} \text{lub} \begin{cases} y=\frac{3}{4}x \\ y=x^2\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=0 \\ y=0\end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{9}{16}\end{cases}\right).$$

We wnętrzu T nie leży żaden z tych punktów.

2°. Szukam p. kryt. na brzegu T :

2° a) Szukam p. kryt. na odcinku $(0,1)(1,0)$:
Pomocnicza funkcja $a:[0,1]\to\mathbb{R}$, $a(x)=f(x,1-x)=2x^2(1-x)-x^3-(1-x)^2=-3x^3+x^2+2x-1$ ma pochodną $a'(x)=-9x^2+2x+2$, która na $[0,1]$ zeruje się tylko w $\frac{1+\sqrt{19}}{9}$, stąd dostajemy trzy punkty krytyczne: $p_1=\left(\frac{1+\sqrt{19}}{9}, 1-\frac{1+\sqrt{19}}{9}\right)$ i końce $p_2=(0,1)$, $p_3=(1,0)$.

2° b) Szukam p. kryt. na odcinku $(0,0)(1,0)$:
F-cja $b:[0,1]\to\mathbb{R}$, $b(x)=f(x,0)=-x^3$ maleje na [0,1], stąd dostajemy tylko końce; $p_4=(0,0)$ (drugi już jest).

2° c) Szukam p. kryt. na odcinku $(0,0)(0,1)$:
Funkcja $c:[0,1]\to\mathbb{R}$, $c(y)=f(0,y)=-y^2$ maleje na $[0,1]$, stąd dostajemy tylko końce (już są).

3°. Oczywiście T jest domknięty i ograniczony, więc (z tw. W.) f osiąga kresy na T, które znajdziemy badając wartości f w owych p. krytycznych:

$$f\left(\tfrac{1+\sqrt{19}}{9}, \tfrac{8-\sqrt{19}}{9}\right)=\tfrac{38\sqrt{19}-187}{243}, \quad f(1,0)=-1=f(0,1), \quad f(0,0)=0.$$

To nie koniec strasznych rachunków, trzeba ów koszmarek porównać z -1 i z 0:

Ponieważ $\frac{38\sqrt{19}-187}{243}>\frac{0-187}{243}>-1$ oraz $\frac{38\sqrt{19}-187}{243}<\frac{38\cdot 4{,}5-187}{243}=\frac{-16}{243}<0$,
więc ostatecznie:

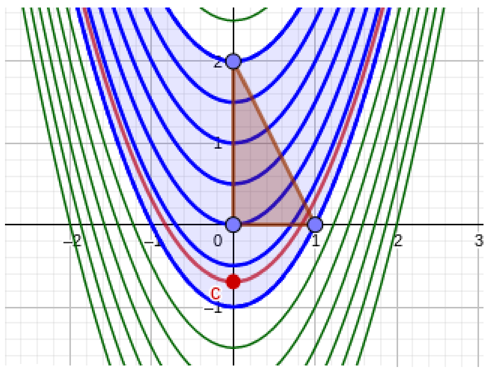
Odpowiedź: $\sup\limits_T f=0=f(0,0)$ oraz $\inf\limits_T f=-1=f(1,0)=f(0,1)$.

Przykład. Znajdź kres górny i kres dolny wartości funkcji $f(x,y)=2x^2y-x^4-y^2$ na zbiorze $T=\Delta(0,0)(1,0)(0,2)$ i wszystkie punkty, w których te kresy są osiągane.

Jest to znacznie trudniejszy przykład. Stosowanie powyższej procedury jest możliwe, ale żmudne. Można 'chytrze'.

Wsk. Zbadaj poziomice.

Odpowiedź: $\inf\limits_T f=-4=f(0,2)$ oraz $\sup\limits_T f=0=f(x,x^2)$, dla $0\le x\le\sqrt{3}-1$.



Dla $f(x,y)=2x^2y-x^4-y^2$
znaleźć $\sup f[T], \inf f[T]$,
gdzie $T=\Delta(0,0)(1,0)(0,2)$.

Wsk. gdy $y=x^2+c$, *to* $f(x,y)=?$