Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 8a

- Zdanie

  'Funkcja $f(x,y) = 3x + 2y^2$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$
  osiąga wartość najmniejszą równą -3.'

oznacza, że $\inf\limits_K f = -3$, gdzie $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$;
innymi słowy: obcięcie $f|_K$, ma kres dolny wartości równy -3.

Można to uzasadnić bez użycia AM 3; wystarczy z warunku wyznaczyć y^2 i zbadać pomocniczą funkcję $p(x) = 3x + 2(1 - x^2)$ **na przedziale** $[-1,1]$ (dlaczego?).
(Można też 'chytrze', czegu tu nie omawiamy.)

W terminologi znanej i poza matematyką powyższe zadanie wygląda tak:

Zad.A.
Zminimalizować $f(x,y) = 3x+2y^2$ przy warunku $g(x,y)=0$, gdzie $g(x,y)=x^2+y^2-1$.

Twierdzenie. (wersja metody mnożników nieoznaczonych Lagrange'a)
Niech f–cje $f, g : D \to \mathbb{R}$ będą klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$.
Niech $g(p_0) = 0$ oraz $f|_{g=0}$ ma w p_0 ekstremum (lokalne lub globalne).
Wtedy wektory $\nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$ są liniowo zależne.
W szczególności gdy $\nabla g(p_0) \neq \vec{0}$, to istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$.

Wniosek. $(m = 3)$ Niech $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mają wszędzie ciągłe gradienty i niech $\nabla g(x,y,z) \neq \vec{0}$ we wszystkich punktach zbioru $W = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$.
Wtedy $f|_W$ może mieć ekstrema tylko w punktach (x,y,z) spełniających układ równań:

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \lambda \cdot g'_x(x,y,z) \\ f'_y(x,y,z) = \lambda \cdot g'_y(x,y,z) \\ f'_z(x,y,z) = \lambda \cdot g'_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) \;=\; 0 \end{cases}.$$

Zad.A. Rozwiązanie
Oczywiście okrąg jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągane. $\nabla g(x,y) = [2x, 2y] \neq \vec{0}$ w punktach tego okręgu, zatem wystarczy z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \cdot 2x \\ 4y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots \\ y=0 \text{ lub } \lambda=2 \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\pm\frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \right).$$

Zatem $f(1,0)=3$, $f(-1,0)=-3=\inf f|_{g=0}$, $f(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})=f(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{7}}{4})=\frac{25}{8}=\sup f|_{g=0}$.

UWAGA. Tu 'strategia' rozwiązywania układu równań jest następująca:
- 'jak najszybciej pozbywamy się owej zmiennej λ',
- nie dbamy o rówoważności, potrzebne nam są implikacje $\Rightarrow$
  (w szczególności nie interesuje nas owa λ),
- twierdzenie nie przesądza, czy w znalezionym rozwiązaniu jest ekstremum,
  potrzeba to jakoś inaczej rozstrzygnąć (np. przy szukaniu globalnego ekstremum, gdy tw.W. zapewni istnienie, to porównamy wartości f-cji w p. krytycznych).

ZAD.B. Znaleźć kresy $f(x,y,z) = x + z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Oznaczmy: $g(x,y,z) =$ ....

Oczywiście .... jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągane; wystarczy więc z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z \\ g(x,y,z){=}0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \cdot \ \ldots \\ 0 = \lambda \cdot 2y \\ 1 = \lambda \cdot 2z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \ lub \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \right) \Rightarrow \ldots$$

Zatem ....

ZAD.C. Znajdź dodatnie liczby x, y, z, o sumie 24, których iloczyn jest największy.

ROZWIĄZANIE. Ponieważ $W = \{(x,y,z) : x+y+z = 24,\ \ x,y,z > 0\}$ NIE JEST domknięty (trójkąt bez boków), więc jest dramat = nie wiemy, czy funkcja $f(x,y,z) = xyz$ osiąga kres górny na W!

Pomysł: zbadam $\hat{f}(x,y,z) = xyz$ na zbiorze $T = \{(x,y,z) : x{+}y{+}z{=}24,\ \ x,y,z \geq 0\}$.

Funkcja $\hat{f}$ na T osiąga swe kresy (bo T jest zwarty; więc można użyć tw. W ......).
Ponieważ
  dla $(x,y,z) \in T \setminus W$ mamy $\hat{f}(x,y,z) = 0$
  oraz
  dla $(x,y,z) \in W$ mamy $\hat{f}(x,y,z) = f(x,y,z) > 0$
więc
  $\sup\limits_T \hat{f} = \sup\limits_W f$ i są przyjęte w tych samych punktach.

Zatem dalej wystarczy znaleźć i zbadać punkty krytyczne $\hat{f}$ w zbiorze W:

$$\begin{cases} yz = \lambda \cdot 1 \\ xz = \lambda \cdot 1 \\ xy = \lambda \cdot 1 \\ x{+}y{+}z{-}24{=}0 \end{cases} \underset{x,y,z>0}{\Longrightarrow} \begin{cases} yz = xz \\ xz = xy \\ x{+}y{+}z{=}24 \end{cases} \underset{x,y,z>0}{\Longrightarrow} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

....

Podobny (do Zad. C) kłopot z brakiem zwartości mamy w poniższym zadaniu:

ZAD.D. Który z punktów linii L o równaniu $x^3+y^3=8$ leży najbliżej punktu $(0,0)$?

IDEA ROZWIĄZANIA.

Zamiast badać funkcję $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ na zbiorze L, wystarczy zbadać funkcję $\hat{f}(x,y)=x^2+y^2$ na zbiorze $L\cap\{(x,y): x^2+y^2\le 3^2\}$ (na przykład).

ZAD.E. Znaleźć kresy $f(x,y)=xy$ przy warunku $x^4+y^4+x^2y^2\le 1$.

ROZWIĄZANIE. Oznaczmy: $g(x,y)=x^4+y^4+x^2y^2-1,\ U=\{(x,y): g(x,y)\le 0\}$.

Zauważmy, że $U\subseteq[-1,1]^2$, bowiem ....

Zatem U jest zbiorem ograniczonym.
Jest też zbiorem domkniętym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągane.

Dalej, poszukwanie p. kryt. należy podzielić na DWA przypadki:

A) Szukam p. kryt. w zbiorze $W=\{(x,y): g(x,y)<0\}$ (wnętrze U):

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{......} & =0 \\ \text{......} & =0 \end{cases}, \quad \text{stąd } p_0=(0,0).$$

B) Szukam p. kryt. w zbiorze $U\setminus W=\{(x,y): g(x,y)=0\}$ metodą Lagrange'a (zauważ, że gdy $\nabla g(x,y)=\vec{0}$ to $(x,y)=(0,0)\notin U\setminus W$):

$$\begin{cases} y=\lambda(4x^3+2xy^2) \\ x=\lambda(4y^3+2x^2y) \\ x^4+y^4+x^2y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\lambda x(4x^2+2y^2) \\ x=\lambda y(4y^2+2x^2) \\ x^4+y^4+x^2y^2=1 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań wynika:
(i) jeśli $x=0$, to $y=0$ (i $y=0$),
(ii) jeśli $y=0$, to $x=0$ (i $x=0$),
(iii) jeśli $\lambda=0$, to $x=0$ i $y=0$,
(iv) jeśli $4x^2+2y^2=0$, to $x=0$ i $y=0$,
(v) jeśli $4y^2+2x^2=0$, to $x=0$ i $y=0$,
ale $(0,0)$ nie spełnia trzeciego równania. Dalej więc możemy założyć, że wszystkie te wyrażenia są różne od 0.

Zatem możemy podzielić stronami pierwsze dwa równania. Po przekształceniach dostajemy $x^4=$ .... Uwzględniając to w trzecim równaniu dostajemy 4 punkty:
$p_1=(1/\sqrt[4]{3},$ ...... $)$, $p_2=($ ...... , ... $)$, $p_3=($ ...... , ... $)$, $p_4=($ ...... , ... $)$.

C) Porównując wartości f w tych pięciu punktach krytycznych dostajemy odpowiedź
$\sup f[U]=1/\sqrt{3}=f($ ...... , ... $)=f($ ...... , ... $)$,
$\inf f[U]=$ ...... $=f($ ...... , ... $)=f($ ...... , ... $)$.