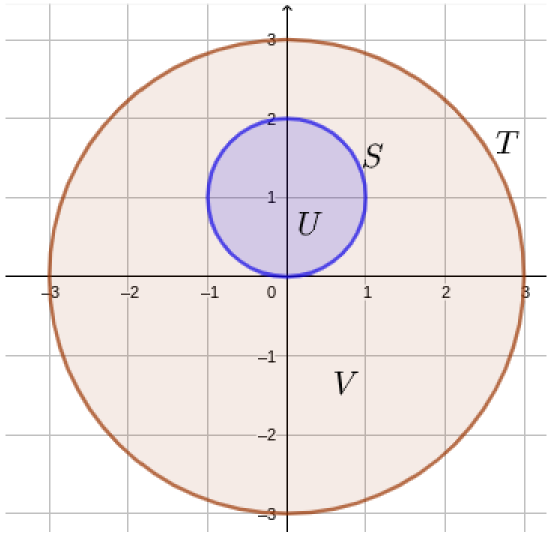
Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 8b

Nie można zapomnieć, że w metodzie Lagrange'a są pewne założenia, w szczególności trzeba uważać na brak różniczkowalności (np. gdy jest wartość bezwzględna):

Przykład. A
Znajdź kresy $f(x,y) = |x^2+y^2-2y| - 6y$ na zbiorze $W = \{(x,y) : x^2+y^2-9 \le 0\}$.



Rozwiązanie. (najważniejszy jest tu plan)
Oczywiście f jest ciągła i W jest kołem, więc (z tw. W.) kresy $f|_W$ są przyjmowane.

Zauważmy, że $x^2+y^2-2y=0 \iff x^2+y^2-2y+1=1 \iff x^2+(y-1)^2=1$ jest równaniem okręgu S zawartego we wnętrzu W (patrz rys .).

Dalej szukamy p. kryt. w CZTERECH zbiorach:

a) w zbiorze $U := \{(x,y) : x^2+(y-1)^2 < 1\}$ (wnętrze koła),
tu $f|_U(x,y) = -(x^2+y^2-2y) - 6y$:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \text{ brak p. kryt., bo } (0,-2) \notin U$$

b) w zbiorze $S := \{(x,y) : x^2+(y-1)^2 = 1\}$ (okrąg),
$f|_S(x,y) = (0) - 6y =: \bar{f}(x,y)$ i stosujemy metodę Lagrange'a ($\nabla \bar{f} \neq \vec{0}$ na S):

$$\begin{cases} \bar{f}'_x = \lambda \cdot 2x \\ \bar{f}'_y = \lambda \cdot 2(y-1) \\ x^2+(y-1)^2-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x \\ -6 = \lambda \cdot 2(y-1) \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \ \ldots\ldots \\ y = \ \ldots\ldots \end{cases} ,$$

i dostajemy: $p_1 = (\ldots,\ldots)$, $p_2 = (\ldots,\ldots)$.

c) w zbiorze $V := \{(x,y) : x^2+(y-1)^2 > 1,\ x^2+y^2 < 9\}$ (wnętrze 'pierścienia'),
tu $f|_V(x,y) = (x^2+y^2-2y) - 6y$:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y-8=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=\ldots \end{cases} \text{ brak p. kryt., bo } (0,\ldots) \notin V$$

d) w zbiorze $T := \{(x,y) : x^2+y^2 = 9\}$ (okrąg),
tu $f|_T(x,y) = (x^2+y^2-2y) - 6y = (9-2y) - 6y =: \hat{f}(x,y)$ i stosujemy met. L.:

$$\begin{cases} \hat{f}'_x = \lambda \cdot 2x \\ \hat{f}'_y = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x \\ -8 = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \ \ldots\ldots \\ y = \ \ldots\ldots \end{cases} ,$$

i dostajemy: $p_3 = (\ldots,\ldots)$, $p_4 = (\ldots,\ldots)$.

Podsumowując: $f(p_1) = \ \ldots\ ,\ f(p_2) = \ \ldots\ ,\ f(p_3) = \ \ldots\ ,\ f(p_4) = \ \ldots\ ,$
stąd $\sup f[W] = \ \ldots\ = f(\ \ldots\ldots\ )$, $\inf f[W] = \ \ldots\ = f(\ \ldots\ldots\ )$.

Uwaga. W b) i d) można 'chytrze' (bez mnożników Lagrange'a).

TWIERDZENIE. (metoda mnożników Lagrange'a)
Niech funkcje $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ będą klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^m$,
niech $g(p_0) = 0$, $h(p_0) = 0$ oraz $f|_{g=0 \wedge h=0}$ ma w p_0 ekstremum lokalne lub globalne.
Wtedy wektory $\nabla f(p_0)$, $\nabla g(p_0)$, $\nabla h(p_0)$ są liniowo zależne.

W szczególności gdy $\nabla g(p_0), \nabla h(p_0)$ są liniowo niezależne, to istnieją $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takie, że
$$\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0) + \mu \cdot \nabla h(p_0).$$

WNIOSEK. Niech $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ są klasy $\mathcal{C}^1$ i gradienty $\nabla g, \nabla h$ są liniowo niezależne. Wtedy $f|_{g=0 \wedge h=0}$ może mieć ekstrema tylko w punktach (x, y, z) spełniających układ:
$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \lambda \cdot g'_x(x,y,z) + \mu \cdot h'_x(x,y,z) \\ f'_y(x,y,z) = \lambda \cdot g'_y(x,y,z) + \mu \cdot h'_y(x,y,z) \\ f'_z(x,y,z) = \lambda \cdot g'_z(x,y,z) + \mu \cdot h'_z(x,y,z) \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

ZAD.B. Znaleźć kresy $f(x, y, z) = y + z$ przy warunkach $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 4$.

Niech $g(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$, $h(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4$ i $W = \{p : g(p) = 0 \text{ i } h(p) = 0\}$.

Jeśli $g(x, y, z) = 0$, to $|x| \leq 1$ i $|z| \leq 1$. Jeśli $h(x, y, z) = 0$, to $|y| \leq 2$ i $|z| \leq 2$.
Zatem punkty spełniające OBA warunki leżą w $[-1, 1] \times [-2, 2] \times [-1, 1]$, czyli W jest zbiorem ograniczonym. Jest też domknięty, więc z tw. W. wynika, że $f|_W$ osiąga swe kresy.

Zauważmy, że gradienty $\nabla g = [2x, 0, 2z]$, $\nabla h = [0, 2y, 2z]$ są liniowo niezależne w punktach z W (gdyby były zależne, to $x = 0 = y$, skąd $z^2 = 1 \neq 4 = z^2$).
Zatem wystarczy z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ
$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x + \mu \cdot h'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y + \mu \cdot h'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z + \mu \cdot h'_z \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2y \\ 1 = \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 2z \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ \\ \\ 0^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + 1 = 4 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = 0 \\ 1 = \mu \cdot 2y \\ 1 = \mu \cdot 2z \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \right)$$
Dalej: w ostatnim układzie ($\lambda = 0$) $\mu \neq 0$ (dlaczego?), skąd $y = z$. Stąd z ostatniego równania $y^2 = z^2 = 2$, co prowadzi do sprzeczności w przedostatnim: $x^2 + 2 = 1$.

Zatem punkty krytyczne dostajemy tylko z pierwszego układu ($x = 0$):
$p_1 = (0, \sqrt{3}, 1)$, $p_2 = (0, -\sqrt{3}, 1)$, $p_3 = (0, \sqrt{3}, -1)$, $p_4 = (0, -\sqrt{3}, -1)$.

Badając sumy $y + z$ dostajemy

ODPOWIEDŹ: $\sup\limits_W f = \sqrt{3} + 1 = f(p_1)$, $\inf\limits_W f = -\sqrt{3} - 1 = f(p_4)$.

ZAD.G. Znaleźć kresy $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$ przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = y$.

.

Zauważmy, że zbiór $W = \{(x, y, z) : x - y = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ jest ....
czyli W jest zbiorem ....
Jest też domknięty, więc z tw. W. wynika, że $f|_W$ osiąga swe kresy.
Zatem wystarczy (z tw. Lagrange'a) zbadać (porównać wartości f) w rozwiązaniach układu:

$$\begin{cases} z^2 = \lambda\cdot 2x + \mu\cdot 1 \\ 3y^2 = \lambda\cdot 2y + \mu\cdot(-1) \\ 2xz = \lambda\cdot 2z + \mu\cdot 0 \\ x-y=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases} \underset{III r.}{\Longrightarrow} \left(\begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ 2y^2+0^2=1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z^2=x\cdot 2x+\mu \\ 3y^2=x\cdot 2y-\mu \\ \lambda = x \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases} \right) \underset{I+II}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{I+II}{\Longrightarrow} \left(\begin{cases} z = 0 \\ x=y \\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z^2+3y^2=2x^2+2xy \\ \ldots\ldots \\ x = y \\ \ldots\ldots \end{cases} \right) \Longrightarrow \left(\begin{cases} z = 0 \\ x=y \\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z^2=x^2 \\ x = y \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \right)$$

Stąd dostajemy 6 punktów krytycznych, w których wartości f są równe:

$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$,

$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Na koniec zauważmy, że $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, bo $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{8}} < \sqrt{\frac{4}{27}} \Leftrightarrow 27 < 32$.

Stąd odpowiedź:

$$\sup_W f = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\inf_W f = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$