Analiza matematyczna 3. Notatki z wykładu 9a

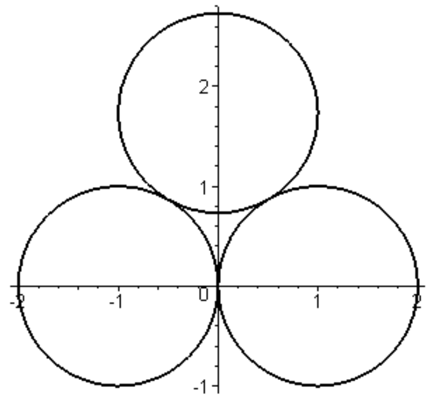
Przykład. (wprowadzający) Niech $F(x,y) = (x^2+(y-\sqrt{3})^2-1)\cdot(((|x|-1)^2+y^2-1)$.

Rozwiązaniem równania $F(x,y)=0$ jest zbiór Z będący sumą trzech okręgów (p.rys.).

Popatrzmy na punkty $p \in Z$ i ich dostatecznie małe otoczenia U_p.
Możliwe są cztery przypadki:

- $\bullet$ $U_p \cap Z$ jest wykresem funkcji $y=y(x)$ i funkcji $x=x(y)$;
- $\clubsuit$ $U_p \cap Z$ jest wykresem funkcji $y=y(x)$ i nie jest wykresem funkcji $x=x(y)$;
- $\diamondsuit$ $U_p \cap Z$ jest wykresem funkcji $x=x(y)$ i nie jest wykresem funkcji $y=y(x)$;
- $\heartsuit$ $U_p \cap Z$ nie jest wykresem funkcji ani $y=y(x)$, ani $x=x(y)$.

Powyższe jest łatwe, bo znamy pełne rozwiązanie owego równania. Poniższe twierdzenie pozwoli (nieco) zbadać szczególne rozwiązania skomplikowanych równań.
Na przykład pozwoli rozstrzygnąć, jakiego rodzaju (w powyższym sensie) jest punkt $(1,2)$, będący jednym z rozwiązań równania $x^5y+x^3y^6-66=0$.



Zaznacz na rysunku punkty typu $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$.

Twierdzenie 1. (o istnieniu funkcji uwikłanej)
Niech $F: D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ i niech $F(p_0)=0$.
Jeśli $F'_y(p_0) \neq 0$,
to istnieje otoczenie $(a,b)\times(c,d) \subseteq D$ punktu p_0 i funkcja $\varphi:(a,b)\to(c,d)$ taka, że

$$(*) \qquad F(x,y)=0 \iff y=\varphi(x), \text{ dla wszystkich } (x,y)\in(a,b)\times(c,d).$$

Ponadto $\varphi'(x) = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ dla wszystkich $x\in(a,b)$, $y=\varphi(x)$.

Wniosek. Przy założeniach jak w twierdzeniu i dodatkowo $F\in\mathcal{C}^2$. Wtedy

$$\varphi''(x) = -\frac{F''_{xx}\cdot(F'_y)^2 - 2F''_{xy}\cdot F'_x\cdot F'_y + F''_{yy}\cdot(F'_x)^2}{(F'_y)^3},$$

gdzie pochodne po prawej są liczone w punkcie (x,y), gdzie $y=\varphi(x)$.

Jeśli $F'_x(x,y)=0$ (czyli $\varphi'(x)=0$), to $\varphi''(x) = -\dfrac{F''_{xx}(x,y)}{F'_y(x,y)}$, gdzie $y=\varphi(x)$.

Uwagi.
Twierdzenie NIC nie mówi, jak znaleźć p_0, pewne rozwiązanie równania $F(p)=0$. Trzeba je np. zgadnąć lub obliczyć jakimiś sprytnymi metodami.
Twierdzenie 'NIECO' mówi, jak 'wyglądają' inne rozwiązania w pobliżu pewnego rozwiązania p_0, ('w pobliżu' tzn. w pewym 'małym' prostokącie zawierającym p_0).
Problem z terminologią . . .

Dowód. (tu tylko części 'ponadto')

Z (*) wynika tożsamość $F(x,\varphi(x))=0$, dla wszystkich $x\in(a,b)$, którą różniczkujemy stronami po x (i korzystamy z reguły łancucha):

$$F'_x(x,\varphi(x)) + F'_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = 0,$$

skąd otrzymujemy pierwszą część 'ponadto': $\varphi'(x) = -\dfrac{F'_x(x,\varphi(x))}{F'_y(x,\varphi(x))}$.

Gdy $F\in\mathcal{C}^2$, otrzymaną tożsamość $\varphi' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$ (piszemy już bez argumentów, by skrócić zapis) jeszcze raz różniczkujemy stronami po x (pamiętając o regule łańcucha):

$$\varphi'' = -\frac{\left(F''_{xx}+F''_{yx}\cdot\varphi'\right)\cdot F'_y - F'_x\cdot\left(F''_{xy}+F''_{yy}\cdot\varphi'(x)\right)}{\left(F'_y\right)^2}.$$

Uwzględniając, że $\varphi' = -F'_x/F'_y$ i porządkując dostajemy finalnie

$$\varphi''(x) = -\frac{F''_{xx}\cdot(F'_y)^2 - 2F''_{xy}\cdot F'_x\cdot F'_y + F''_{yy}\cdot(F'_x)^2}{(F'_y)^3},$$

gdzie pochodne po prawej są liczone w punkcie $(x,\varphi(x))$. $\square$

1. Jak wygląda rozwiązanie równania $x^3y^6{+}x^4y^2 = 20{+}x^2y^4$ w pobliżu punktu (2,1)?

Dla $F(x,y) = x^3y^6{+}x^4y^2 - 20{-}x^2y^4$ równanie jest tożsame z $F(x,y) = 0$.

Dla $p_0 = (2{,}1)$ mamy: $F(p_0) = 0$, $F'_y = 6x^3y^5 + 2x^4y - 4x^2y^3$ i $F'_y(2,1) = 64 \neq 0$, więc w pewnym otoczeniu p_0 rozwiązanie jest wykresem (jakiejś) funkcji $y = \varphi(x)$, o której można powiedzieć, że:

- maleje w pobliżu p_0, bo $F'_x = 3x^2y^6 + 4x^3y^2 - 2xy^4$ i $F'_x(2,1) = 40$, więc funkcja φ ma pochodną $\varphi'(2) = -\frac{40}{64} = -\frac{5}{8} < 0$ i, z ciągłości, φ' jest też ujemna w pobliżu,
- ma styczną o równaniu $y = -\frac{5}{8}\cdot(x-2)+1$,
- jest wypukła (skąd leży powyżej tej stycznej) w pobliżu, bo $\varphi''(2) = ... = \frac{9}{128} > 0$).

Podobnie można zbadać rozwiązanie tego równania w pobliżu punktu $(\sqrt[9]{20}, \sqrt[9]{20})$. (Nie ma ogólnego sposobu znajdowania takich punktów, trzeba je jakoś odgadnąć.)

2. Gdzie rozwiązanie równania $x^3{+}y^3{=}2xy$ ma poziomą styczną (równoległą do OX)?

Na pewno tam, gdzie (dla $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$):

$$\begin{cases} -\dfrac{F'_x}{F'_y} = 0 \\ F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ F = 0 \\ F'_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ x^3 + y^3 = 2xy \\ 3y^2 - 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ x^3 + (\frac{3}{2}x^2)^3 = 2x(\frac{3}{2}x^2) \\ \ldots \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Stąd w $(\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{4})$ jest pozioma styczna. **Z powyższego nie wiadomo,** co z $(0,0)$.

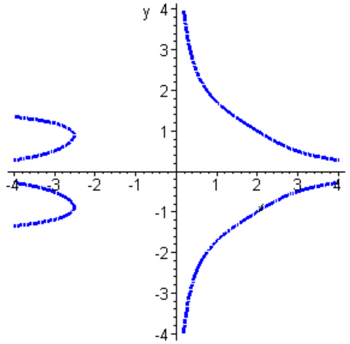
3. Znaleźć ekstrema lolalne funkcji uwikłanej $x^2y^2 + y^4 = 5 + x^4$.

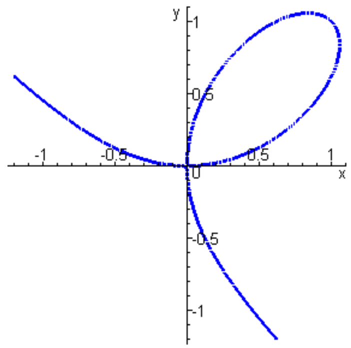
Dla $F(x,y) {=} x^2y^2{+}y^4{-}5{-}x^4$ mamy $F'_x = 2xy^2{-}4x^3$, $F'_y {=} y(2x^2{+}4y^2)$, $F''_{xx} {=} 2y^2{-}12x^2$. Punkty, w krytyczne (podejrzane) spełniają układ:

$$\begin{cases} -\dfrac{F'_x}{F'_y} = 0 \\ F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ F = 0 \\ F'_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

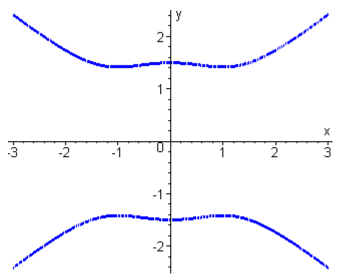
Badając znak drugiej pochodnej $= -\frac{F''_{xx}}{F'_y}$ funkcji uwikłanej rozstrzygamy jakie ekstremum lokalne ma f. uwikłana w poszczególnych punktach krytycznych:

- w $(0, \sqrt[4]{5})$ jest maksimum lokalne f. uwikłanej, (bo $-\frac{2(\sqrt[4]{5})^2 - 0}{\sqrt[4]{5}(0+4(\sqrt[4]{5})^2)} = -\frac{\geq 0}{>0} < 0$)
- w $(0, -\sqrt[4]{5})$ jest minimum lokalne f. uwikłanej, (bo $-\frac{2(-\sqrt[4]{5})^2 - 0}{-\sqrt[4]{5}(0+4(-\sqrt[4]{5})^2)} = -\frac{\geq 0}{<0} > 0$)
- w $(1, \sqrt{2})$ jest ....
- w $(1, -\sqrt{2})$ jest ....
- w ......
- w ......





Uwaga. Powyżej widać linię $x^3{+}y^3 = 2xy$. Podobny kształt ma linia $x^3{+}y^3 = 3xy$. Linia $x^3 + y^3 = 3xy + 48$ nie ma 'samoprzecięć'. Warto ją zbadać w punktach: $p_0 = (-4,4)$, $p_1 = (2,4)$, $p_2 = (-\sqrt[3]{6}, (-\sqrt[3]{6})^2)$.
Jeszcze ciekawiej wygladają linie $x^3 + y^3 = 3xy + p$, przy $p \in [-1,0]$.



$y^4 + x^2\,y^2 - x^4 - 5 = 0$

Twierdzenie 2. (o istnieniu funkcji uwikłanej)

Niech $F : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $p_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^3$ i niech $F(p_0)=0$.

Jeśli $F'_z(p_0) \neq 0$, to istnieje otoczenie $(a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\times (c, d)\subseteq D$ punktu p_0 i funkcja $\varphi : (a_1, b_1)\times(a_2, b_2) \to (c, d)$ taka, że

(*) $F(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y)$, dla wszystkich $(x, y, z)\in (a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\times(c, d)$.

Ponadto $\quad \varphi'_x(x, y)=-\dfrac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$, $\varphi'_y(x, y)=-\dfrac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$,

dla $z=\varphi(x, y)$, $(x, y)\in(a_1, b_1)\times(a_2, b_2)$.

Uwaga. Z (*) **wynika** (**) $F\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0$, dla $(x, y) \in (a_1, b_1)\times(a_2, b_2)$ (ale (*) mówi więcej!).

4. Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z^3+y^2=16+xyz$ w $(1, 4, 2)$.

Dla $F(x, y, z) = z^3+y^2-16-xyz$ obliczamy $F'_x(x, y, z) = -yz$, $F'_y(x, y, z) = 2y - xz$, $F'_z(x, y, z) = 3z^2 - xy$. Ponieważ $F'_z(1, 4, 2) = 3 \cdot 2^2 - 1 \cdot 4 = 8 \neq 0$, więc w pewnym otoczeniu punktu $(1, 4, 2)$ powierzchnia jest wykresem funkcji uwikłanej $z = \varphi(x, y)$.

Stąd mamy $\varphi'_x(1, 4) = -\frac{-4\cdot 2}{3\cdot 2^2-1\cdot 4} = 1$, $\varphi'_y(1, 4) = -\frac{2\cdot 4-1\cdot 2}{3\cdot 2^2-1\cdot 4} = -\frac{3}{4}$,

skąd dostajemy równanie pł. stycznej: $z = 2 + 1 \cdot (x - 1) - \frac{3}{4}(y - 4)$.

5. Powierzchnia P ma równanie $4x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 8yz = 4xy + 4xz + 3$. Wiedząc, że P ma kształt elipsoidy, wyznacz jej punkt o największej zetowej współrzędnej.

Niech $F(x, y, z) = 4x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 4xy - 4xz + 8yz - 3$.

Mamy $F'_x(x, y, z) = 8x-4y-4z$, $F'_y(x, y, z) = 14y-4x+8z$, $F'_z(x, y, z) = 14z-4x+8y$. Układ równań

$$\begin{cases} -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = 0 \\ -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x, y, z) = 0 \\ F'_y(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y - 4z = 0 \\ 14y - 4x + 8z = 0 \\ 4x^2+7y^2+7z^2+8yz=4xy+4xz+3 \\ 14z - 4x + 8y \neq 0 \end{cases}$$

ma dwa rozwiązania $p_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $p_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ (żmudnie!).

Dlaczego szukanym punktem jest $p_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$?

Spekulacje (o istnieniu układu funkcji uwikłanych)

Niech dla $i \leq n$ funkcje $F_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ ($n+m$ zmiennych; nieco dziwnie nazwanych) będą $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $\bar{p} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$. Niech ponadto $F_i(\bar{p}) = 0$, dla $i \leq n$. Innymi słowy: $\bar{p}$ jest jednym z rozwiązań układu n równań:

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

Jak wygląda pełne rozwiązanie? AM3 nie daje odpowiedzi, ale przy dodatkowych założeniach podaje pewne informacje o rozwiązaniach w pobliżu $\bar{p}$.

Poniżej spekulacje pozwolą postawić hipotezę (co do założeń i tezy):

Wiemy, że w pobliżu $\bar{p}$ funkcje F_i można przybliżać (hiper)-płaszczyznami stycznymi:

$$F_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \approx$$

$$\approx F_i(\bar{p}) + \tfrac{\partial F_i}{\partial x_1} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) + \ldots + \tfrac{\partial F_i}{\partial x_m} \cdot (x_m - \bar{x}_m) + \tfrac{\partial F_i}{\partial y_1} \cdot (y_1 - \bar{y}_1) + \ldots + \tfrac{\partial F_i}{\partial y_n} \cdot (y_n - \bar{y}_n)$$

gdzie pochodne cząstkowe są liczone w $\bar{p}$ (więc są STAŁE!). Zatem po prawej stronie są funkcje liniowe (dokładniej: afiniczne) zmiennych $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$.

Teraz układ (*) można **prawie** zastąpić przez poniższy ($cosik_i$ są stałe!):

$$(**) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \tfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot x_1 + \ldots + \tfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \cdot x_m + \tfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot y_1 + \ldots + \tfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \cdot y_n & = & cosik_1 \\ \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot x_1 + \ldots + \tfrac{\partial F_2}{\partial x_m} \cdot x_m + \tfrac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot y_1 + \ldots + \tfrac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot y_n & = & cosik_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tfrac{\partial F_n}{\partial x_1} \cdot x_1 + \ldots + \tfrac{\partial F_n}{\partial x_m} \cdot x_m + \tfrac{\partial F_n}{\partial y_1} \cdot y_1 + \ldots + \tfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \cdot y_n & = & cosik_n \end{array} \right.$$

który jest układem n równań liniowych (o $n+m$ niewiadomych).

GDYBY wiedzieć, że

$$(\heartsuit) \qquad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \neq 0 \, ,$$

to (z AL) wiemy, że $y_1, \ldots, y_n$ można wyrazić przy pomocy pozostałych zmiennych.

Powyższe daje nadzieję, że w pobliżu $\bar{p}$, gdy ($\heartsuit$), to istnieją funkcje $\varphi_i(x_1, \ldots, x_m)$ takie, że wszystkie rozwiąznia (*) tworzą fragment wykresu funkcji $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)) \end{pmatrix} .$$