Analiza matematyczna 3. Lista 10.

1. Wyraź całki we współrzędnych cylindrycznych i oblicz je.

a) $\iiint\limits_A x^2+y^2\,dV$ gdzie A jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=4$

b) $\iiint\limits_B z\,dV$ dla $B=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y,z\ge 0\}$ **c)** $\int\limits_0^3\int\limits_0^x\int\limits_0^2 x\,dzdydx$

d) $\iiint\limits_D y^2\,dV$ gdzie D jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$

2. Wyraź całki jako całki iterowane w nowych podanych współrzędnych (nie obliczaj ich)

a) $\int\limits_1^2\int\limits_4^9 x\sqrt{y}\,dydx \begin{cases} x=u\\ y=v^2\end{cases}$ **b)** $\iint\limits_{\substack{1\le x+y\le 2\\ 3\le y-x\le 4}} xy\,d\omega \begin{cases} x=u-v\\ y=u+v\end{cases}$ **c)** $\int\limits_1^2\int\limits_0^{x^2} y\,dydx \begin{cases} x=\sqrt{u}\\ y=v\end{cases}$

3. Znajdź nowe współrzędne, w których obszar całkowania jest kołem o środku (0,0), lub jego częścią i wyraź całki w nowych podanych współrzędnych (nie obliczaj ich)

a) $\iint\limits_{(x-3)^2+(y-4)^2\le 9} xy\,d\omega$ **b)** $\iint\limits_{\substack{(4x-12)^2+9y^2\le 4\\ y\le 0,\ x\ge 3}} xy\,d\omega$ **c)** $\int\limits_0^2\int\limits_{-3\sqrt{4-x^2}}^{3\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx$

4'. Oblicz: **a)** $\iint\limits_{(x+5)^2+4(2y+1)^2\le 9} xy\,d\omega$ **b)** $\iint\limits_{(x+y)^2+(2x+3y)^2\le 4} xy\,d\omega$

4. Wyraź całki w nowych podanych współrzędnych i oblicz je.

a) $\int\limits_2^3\int\limits_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} xy\,dydx \begin{cases} s=x\\ t=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ **b)** $\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}(x+y)^{10}dydx \begin{cases} x=s\cos^2 t\\ y=s\sin^2 t\end{cases}$

* * *

5. Uzasadnij, że przejście z ukł. sferycznego na kartezjański ma jakobian $J=r^2\sin\varphi$.

6. Przedstaw całkę $I=\iiint\limits_V x^2+y^2+z^2\,dV$ jako całkę iterowaną we współrzędnych

a) cylindrycznych **b)** sferycznych **c)** kartezjańskich,

gdy V jest mniejszą z brył ograniczonych pow. $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2=4$. Oblicz też wartość I.

* * *

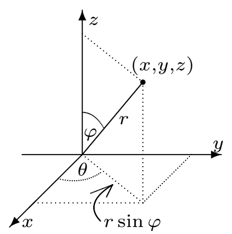
7. Uzasadnij, że ciągi $a_k=\iint\limits_{[0,9k]\times[0,k\pi]}\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,d\omega$, $b_n=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le n^2\\ x,y\ge 0}}\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,d\omega$:

a) są rosnące **b)** $\underset{n}{\forall}\ \underset{k}{\exists}\ a_k>b_n$ **b')** $\underset{k}{\forall}\ \underset{n}{\exists}\ b_n>a_k$ **c)** $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\frac{\pi^2}{8}$

8. Dla jakich wartości parametru $p>0$ całka $\iint\limits_{||(x,y)||\le 1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}d\omega$ jest zbieżna?

.

Układ sferyczny



Podpisując długości kresek za pomocą r,φ,θ otrzymujemy wzór

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi$$

przekształcenia z 'nieskończonego pół-prostopadłościanu'

$$0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\ge 0$$

(w układzie $Or\varphi\theta$) na całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ (w układzie $Oxyz$).

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

W tym przekształceniu obrazem prostokąta: $r=0$, $0\le\varphi\le\pi$, $0\le\theta\le 2\pi$ jest punkt $(0,...,...)$, a obrazem prostokąta $r=3$, $0\le\varphi\le\pi$, $0\le\theta\le 2\pi$ jest sfera o równaniu $x^2+y^2+z^2=....$ Obrazem półprostej $\varphi=\frac{\pi}{4}=\phi$ jest półprosta $x=y=$ ...... , Inne przykłady (strzałka $\to$ oznacza 'jest przekształcane na'):
$\varphi=0\to$ półoś O..., $\varphi=\frac{\pi}{...}\to$ pow. stożka $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}\to$ pł. $z=...$,
$r\in$ ... $\to$ obszar $4<x^2+y^2+z^2\le 9$, $r=3\cos\varphi\to$ kula $x^2+y^2+(z-...)^2\le ...$,
$r=-3\cos\varphi\to$ kula $x^2+y^2+(z-...)^2\le ...$, $r=\frac{4}{\cos\varphi}\to$ płaszczyzna $z=...$.

Przykład. Dla różnicy kul $V=\{(x,y,z): 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$ obliczamy:

$$\iiint\limits_V z^2=\iiint\limits_{V'} r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_1^2 r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta=...=\frac{124}{15}\pi.$$