Analiza matematyczna 3. Lista 11.

1. Oblicz całki krzywoliniowe nieskierowane: $\int_A |x|+y\,ds$, $A=\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$, $\int_B x(\operatorname{arctg} y)^7\,ds$, $B=\{(x,x^2) : |x|\le 1\}$, $\int_C x+y\,ds$, $C=\{(x,y) : x^2+y^2=2x+4y\}$, $\int_D \frac{ds}{x^2}$, $D=A\cap([\frac{1}{2},2]\times\mathbb{R})$, $\int_E \frac{y}{\sqrt{4x^2+1}}\,ds$, $E=\{(x,x^2) : -1\le x\le 2\}$, $\int_E x\,ds$, $\int_F x+y+z\,ds$, $F=$ odcinek łączący punkty $(1,2,3)$ i $(6,5,4)$, $\int_F xyz\,ds$

2. Oblicz całki powierzchniowe **a)** $\iint_S x\,dS$, gdzie $S=[0,1]^3\setminus(0,1)^3$

b) $\iint\limits_{\substack{2x+4y+2z=8\\ x,y,z\ge 0}} xz\,dS$ **c)** $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=4\\ x,y,z\ge 0}} yz\,dS$, **d)** $\iint\limits_{\substack{(x+y)^2+z^2=1\\ x,y,z\ge 0}} \sqrt{\frac{1-(x+y)^2}{1+(x+y)^2}}\,dS$

e) $\iint\limits_{z=x^2+y^2,\ x,y\in[0,1]} xy\,dS$ **f)** $\iint_P x^2+y^2 dS$, $P=\{(x,y,x^3-3xy^2) : x^2+y^2\le 1\}$

g) $\iint_W y+x^2 dS$, gdy W jest powierzchnią boczną walca $x^2+y^2=9$, $0\le z\le 4$

* * *

3. Niech $K=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=9,\ z\ge 0\}$. Znajdź masę K, gdy gęstość w punkcie (x,y,z) jest równa **a)** odległości (x,y,z) od płaszczyzny $z=0$
b) kwadratowi odległości (x,y,z) od płaszczyzny $z=0$

3'. Niech $K=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=9,\ z\ge 0\}$ oraz $L=K\cap(\{0\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Znajdź masę L, gdy gęstość w punkcie (x,y,z) jest kwadratem odległości (x,y,z)
x) od osi OX **y)** od osi OY **z)** od osi OZ **xy)** od płaszczyzny $z=0$

4. Zakładając, że gęstość jest stała, znajdź środek masy **a)** $\{(x,y) : 0\le y\le 1-x^2\}$
b) półokręgu **b')** półkola **b")** półkuli **b"')** półsfery **c)** stożka

UMOWA. Poniżej 'wyznacz' oznacza 'zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych'. Niektóre z tych całek można obliczyć 'do końca' – które?

5. Wyznacz środek masy powierzchni bocznej stożka (o wysokości H i promieniu podstawy R), gdy gęstość (powierzchniowa) jest kwadratem odległości:
a) od podstawy **b)** od wierzchołka **c)** od środka wysokości

5'. Wyznacz energię kinetyczną powierzchni z zadania 5., gdy kręci się wokół wysokości w tempie 7 obrotów na sekundę.

6. Wyznacz masę piramidy o wysokości 3 i podstawie 2×2, jeżeli gęstość jest proporcjonalna
a) do kwadratu odległości od wierzchołka i w środku podstawy jest równa 7
b) do sześcianu odległości od podstawy i w (górnym) wierzchołku jest równa 1.

Ściąga. Niech figura $B\subset\mathbb{R}^2$ ma gęstość powierzchniową $\rho=\rho(x,y)$. Współrzędne jej środka masy $S=(S_x,S_y)$ wyrażają się wzorami

$$S_x=\frac{1}{M}\iint_B x\cdot\rho(x,y)\,d\omega,\ S_y=\frac{1}{M}\iint_B y\cdot\rho(x,y)\,d\omega,\ \text{gdzie masa } M=\iint_B \rho(x,y)\,d\omega.$$

Analogiczne są wzory na środek masy S bryły $B\subset\mathbb{R}^3$ o gęstości $\rho=\rho(x,y,z)$.

Ściąga. Dla $n=1..8$ ciąg $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ jest równy $\left(1,\frac{\pi}{4},\frac{2}{3},\frac{3\pi}{16},\frac{8}{15},\frac{5\pi}{32},\frac{16}{35},\frac{35\pi}{256}\right)$.