Analiza matematyczna 3. Lista 12.

0. Oblicz 'na palcach': $\int\limits_{(1,1)(9,2)} (1,4)\circ d\vec{r}$, $\int\limits_{brzeg[0,1]^2} (1,4)\circ d\vec{r}$, $\int\limits_{x^2+y^2=4} (x,y)\circ d\vec{r}$

1. Oblicz całki krzywoliniowe skierowane
$\int_A \vec{F}\circ d\vec{r}$, dla $\vec{F}(x,y)=(2x+3y,4x+5y)$, gdzie A – odcinek od $(0,1)$ do $(3,3)$
$\int_B (x^2+y)dx+(x-y)dy$, B – część paraboli $y^2=x$ od $(1,-1)$ do $(1,1)$
$\int\limits_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}$, dla: $\vec{F}(x,y)=(y,x)$ lub $\vec{F}(x,y)=(-y,x)$, lub $\vec{F}(x,y)=(y^2,x^2)$,
gdy Γ to: **c)** odcinek od $(0,1)$ do $(2,2)$ **d)** okrąg $x^2+y^2=4$ **d')** o śr. (0,2)

2. Wznacz pracę potrzebną do przeniesienia 1kg pokonując pole sił $\vec{F}=[x^2-y, xy, z^z]$ wzdłuż linii $y^2=8x$, $z=1$ od punktu $A(0,0,1)$ do punktu $B(2,4,1)$.

3. Oblicz całkę, gdy Γ jest krzywą gładką skierowaną od A do B :
a) $\int_\Gamma (\pi x+y)\,dx+(x-\sqrt{2}y)\,dy$, $A=(0,1)$, $B=(2,3)$
b) $\int_\Gamma (e^x+y)\,dx+(x+2y)\,dy$, $A=(0,1)$, $B=(u,v)$
c) $\int_\Gamma y\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz$, $A=(-1,1,0)$, $B=(3,4,5)$
d) $\int_\Gamma (\cos x+2yz)dx+(\sin y+2xz)dy+(z+2xy)dz$, $A=(0,0,0)$, $B=(\pi,\pi,\pi^{-1})$

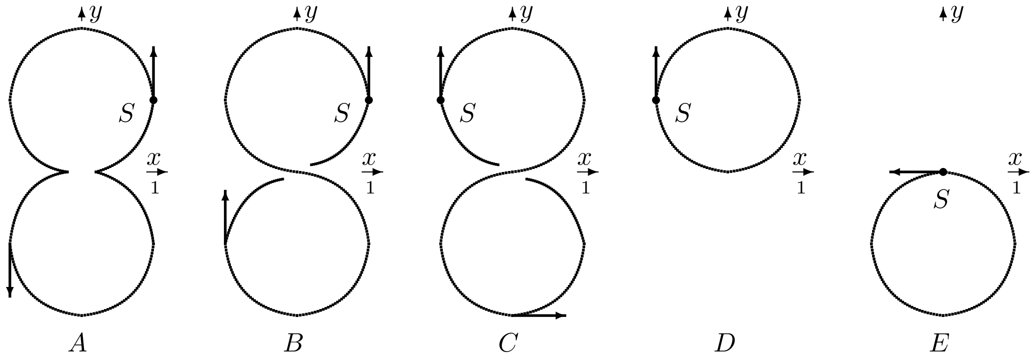
4. Oblicz całkę $\int\limits_K \vec{F}\circ d\vec{r}$, gdzie K jest brzegiem Ω skierowanym przeciwzegarowo i:
a) $\vec{F}=(P,Q)$ gdzie $P=xe^{x^2+y^2}$, $Q=ye^{x^2+y^2}$ oraz $\Omega=\{(x,y):4x^2+9y^2\le 1\}$
b) $\vec{F}(x,y)=(2xy, 2^{\sin y}+x^2)$, $\Omega=\{(x,y):x^2\le y\le 1\}$
c) $\vec{F}(x,y)=(y^2-y,(x+y)^2)$, $\Omega=[-1,1]^2$ **c')** $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 2x\}$
d) $\vec{F}=(0,xy)$, $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\ ,x,y\ge 0\}$ **d')** $\Omega=\{(x,y):x^4+y^4\le 1\}$
e) $\vec{F}=(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$, $\Omega=[-1,1]\times[1,4]$ **e$^!$)** $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le R^2\}$
f) $\vec{F}=\frac{1}{||(x,y)||}(-y,x)$, $\Omega=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ **f$^!$)** $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 9\}$

5. Zastosuj wzór Greena do obliczenia całek (krzywe są skierowane przeciwzegarowo)
a) $\oint\limits_{x^2+5y^2=17} x^{2021}e^{2022y}dx+x^{2022}e^{2022y}dy$ **b)** $\oint\limits_{x^{2020}+y^{2022}=1} e^{(x+y)^7}dx+e^{(x+y)^7}dy$

6. Niech $K=\{(x,y):x^2+y^2=1, y\ge 0\}$, $M=\{(x,y):y=|x|-1, x\in[-1,1]\}$, $L=[-1,1]\times\{0\}$, oznaczają krzywe skierowane od $(1,0)$ do $(-1,0)$.
Oblicz $\int_K P\,dx+Q\,dy$ i $\int_M P\,dx+Q\,dy$ wiedząc, że
a) $Q'_x-P'_y=6$ i $\int_L P\,dx+Q\,dy=2$ **b)** $Q'_x-P'_y=x^{17}$ i $\int_L P\,dx+Q\,dy=\sqrt{2}$

Poniższe zadania można zrobić 'sprytnie'; niemal nic nie rachując. Spróbuj

7. Okręgi D,E i ich sumy A,B,C są skierowane od S do S, jak pokazano poniżej. Pole $\vec{F}=(P,Q)$ jest takie, że $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y+6+x^9$. Oblicz:



$\int\limits_A \vec{F}\circ d\vec{r}=\ ...$ $\int\limits_B \vec{F}\circ d\vec{r}=\ ...$ $\int\limits_C \vec{F}\circ d\vec{r}=\ ...$ $\int\limits_D \vec{F}\circ d\vec{r}=\ ...$ $\int\limits_E \vec{F}\circ d\vec{r}=\ ...$

8. Oblicz całki krzywoliniowe nieskierowane
a) $\int\limits_A \ln((x-2)^2+y^2)\,ds$ **b)** $\int\limits_A y+\sqrt{2}\,ds$ **c)** $\int\limits_C x+y(x^4+1)\,ds$
dla okręgu A o środku (2,0) i promieniu 2 oraz odcinka C o końcach (0,0),(0,2)

* * *

Ściąga.

Poniżej w każdej linii jest pojęcie i jego różne (typowe) oznaczenia:
- pole wektorowe: $\vec{F}$, $\vec{F}(x,y)$, (P,Q), $(P(x,y),Q(x,y))$
- parametryzacja krzywej Γ: $\vec{r}$, $\vec{r(t)}$, $(x(t),y(t))$, (x_t,y_t), (x,y),
- całka skierowana: $\int\limits_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}$, $\int\limits_\Gamma (P,Q)\circ d\vec{r}$, $\int\limits_\Gamma P dx+Q dy$, $\int\limits_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Tw. Gdy $\vec{r}:[a,b]\to\Gamma$, $\vec{r}=(x(t),y(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to
$$\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^b P(x(t),y(t))\cdot\tfrac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t))\cdot\tfrac{dy}{dt}\ dt\ .$$

Tw. Gdy $\vec{F}=\operatorname{grad} f$ i $\vec{r}:[a,b]\to\Gamma$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to
$$\int\limits_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=f(\vec{r}(b))-f(\vec{r}(a))\ .$$

Twierdzenie Greena. Niech K będzie krzywą płaską skierowaną dodatnio (przeciwzegarowo) ograniczającą obszar Ω 'bez dziur' i niech $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ będzie polem wektorowym określonym na Ω, gdzie P, Q są klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy
$$\int\limits_K P dx+Q dy=\iint\limits_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,d\omega\ .$$