ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 2.

0. Niech $f(x,y)=\frac{x}{y}$. Podaj przykład ciągu $a_n=(x_n,y_n)$ zbieżnego do (0,0) takiego, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 2$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = -\pi$ **0'.** Powtórz dla $f(x,y) = \frac{y^2}{x^3}$.

* * *

1. Dla $f(x,y) = x^2 + |y|$ i $s \in \{1,2,4\}$ naszkicuj zbiory (w jednym ukł. współrz.):

a) $P_s = \{(x,y) : f(x,y) = s\}$ **a')** $W_s = \{(x,y,s) : f(x,y) = s\}$

b) $B_s = \{(x,z) : z = f(x,s)\}$ **c)** $C_s = \{(y,z) : z = f(s,y)\}$

2. Jaką symetrię ma wykres funkcji f spełniającej warunek (dla każdej pary (x,y)):

a) $f(x,y)=f(5-x,y)$ **b)** $f(x,y)=f(6-x,7-y)$ **c)** $f(x,y)=f(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y)$

3. Opisz (i naszkicuj) zbiór będący dziedziną funkcji $f(x,y)$ o wzorze:

a) $\ln(x^2+y^2-9)$ **b)** $\sqrt{9-x^2/4-y^2}$ **c)** $\ln(y^2-4x+8)$ **d)** $\sqrt{x^2-y^2}$

4. Narysuj poziomice (i/lub inne cięcia) wykresu funkcji tak, by odkryć jego kształt.

a) $z = x^2+y^2$ **b)** $z = x^2+y^2+2xy$ **c)** $z = x^2+y^2+xy$ **d)** $f(x,y) = 5-x+2y$

e) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ **f)** $f(x,y) = |y| - \sqrt{1-x^2}$ **g)** $g(x,y) = \sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-x^2}$

5. Dobierz odpowiednią funkcję i jej dziedzinę tak, by jej wykres wyglądał jak:

a) trójkąt o wierzchołkach $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$
b) kwadrat o wierzchołkach $(0,0,2)$, $(2,0,0)$, $(2,2\sqrt{2},0)$
c) półsfera o środku (1,2,3) i promieniu 4
d) powierzchnia boczna stożka o wysokości (1,1,0)(1,1,3) i promieniu podst.= 3

6. Dla $s \in \{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5}\}$ naszkicuj poziomice P_s funkcji $f(x,y)$ o wzorze:

a) $\sqrt{|x|+|y|}$ **b)** $\left[x^2+(y-1)^2\right]$ **c)** $x^2/y+y-2$ **d)** $\sqrt{|y-1|}/\sqrt{|x|}$

6'. Karol Omyłek miał poniższe kłopoty z rozwiązaniem zadanie **6c)**. Pomóż mu:

Mamy
$$x^2/y + y - 2 = s$$
$$x^2 + y^2 - 2y = sy$$
$$x^2 + y^2 - 2(1+\tfrac{1}{2}s)y + (1+\tfrac{1}{2}s)^2 = (1+\tfrac{1}{2}s)^2$$
$$x^2 + (y-(1+\tfrac{1}{2}s))^2 = (1+\tfrac{1}{2}s)^2$$

Zatem wydaje się, że P_s są okręgami o środkach (... , ...) i promianiach ....

7 (dodatkowe). Czy istnieje taka funkcja $f(x,y)$, której poziomice P_s, dla $s\in(0,1)$, są brzegami kwadratów a cięcią płaszczyznami $x=0$ i $y=0$ są półokręgami?