

## ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 3.

UWAGA. Łatwe są tylko początkowe podpunkty poniższych zadań.

1. Zbadaj istnienie następujących granic, oblicz wartość, jeśli granica istnieje

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{d) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{e) } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^4 \leq y \leq |x|^3}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^6} \quad \text{f) } \lim_{\substack{x \rightarrow 3^+ \\ y \rightarrow 4^+}} \frac{\ln y - \ln 4}{x - 3} \quad \text{g) } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

$$\text{h) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{y-x^2} \quad \text{i) } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} e^{y/x^2} \quad \text{j) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^4 + y^4} \quad \text{k) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4}$$

$$\text{l) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} \quad \text{m) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin x}{y} \quad \text{n) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy \sin(x)}{x^2 + y^2} \quad \text{o) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

2. Znajdź wartości parametru  $p \in (0, +\infty)$ , dla których funkcja  $f$  ma granicę w  $(0, 0)$

$$\text{a) } \frac{x^2 y^2}{|x|^p + y^2} \quad \text{b) } \frac{|x|^p y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{c) } \frac{|x|^p y^2}{x^2 + y^4} \quad \text{d) } \frac{|x|^p}{x^2 y^4} \quad \text{e) } \frac{\ln(1 + x^4 y^6)}{x^4 |y|^p}$$

3. Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji  $f$

$$\text{a) } f(x, y) = y \cdot \operatorname{sgn} x \quad \text{b) } f(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y) \quad \text{c) } f(x, y) = [x] + [y - 0, 1]$$

$$\text{d) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \geq y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases} \quad \text{e) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x^2 \geq y \\ x + y & \text{dla } x^2 < y \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^3)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ y - 2y^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \text{g) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^3)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y - 2y^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{h) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 5y - 4 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \text{i) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2 y} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y^2 - 7 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

4. W zależności od wartości parametru  $p$ , podaj liczbę punktów ciągłości funkcji  $f$  leżących na brzegu kwadratu  $[0, 1]^2$ , czyli w zbiorze  $W = [0, 1]^2 \setminus (0, 1)^2$ .

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} x & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases} \quad \text{d) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases}$$

$$\text{e) (dodatkowe) } f(x, y) = \begin{cases} \sin(p \cdot \pi(x+y)) & \text{dla } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ 0 & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1]^2 \end{cases}$$