Analiza matematyczna 3. Lista 8.

1. Które całki można obliczyć bez rachunku całkowego? **a)** $\iint\limits_{[0,1]^2} 2x + 3y \, d\omega$

b) $\iint\limits_{[0,1]^2} e^{[x+y]} \, d\omega$ **c)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} e^{[x+y]} \, d\omega$ **d)** $\iint\limits_{[0,1]^2} x^2y^3 \, d\omega$ **e)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} x^2y^3 \, d\omega$

f) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2y^3 \, d\omega$ **g)** $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2} \, d\omega$ **h)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} |x+y| \, d\omega$

2. Niech ω_n oznacza podział $P=[0,1]^2$ na n^2 przystających kwadratów (n parzyste).

(i) Oblicz (sprytnie) sumy dolne s_{ω_n}, sumy górne S_{ω_n} i porównaj z $\iint\limits_P f(x,y)\, d\omega$ dla

a) $f(x,y) = [y^2]$ **b)** $f(x,y) = \{2y\}$ **c)** $f(x,y) = y^2$ **d)** $f(x,y) = x+y$

(ii) Oblicz (sprytnie) różnicę $S_{\omega_n} - s_{\omega_n}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\omega_n} - s_{\omega_n}$ dla

e) $f(x,y) = [y\sqrt{2}]$ **f)** $f(x,y) = \pi x + ey$ **g)** $f(x,y) = e^y$ **h)** $f(x,y) = e^x + y^5$

* * *

3. Oblicz całki iterowane (podaj całki podwójne/potrójne, z których powstały).

a) $\int_2^4 \int_3^7 xy\,dxdy$ **b)** $\int_1^2 \int_{x-1}^{x+1} xy\,dydx$ **c)** $\int_4^6 \int_1^2 \int_2^3 xyz\,dxdydz$ **d)** $\int_0^1 \int_z^{2z} \int_0^y yz^2 dxdydz$

4. Zapisz $\iint\limits_A y\,d\omega$ jako całkę iterowaną i oblicz, gdy A = obszar ograniczony przez linie

a) $|x| = 2$, $|y| = 1$ **b)** $y = x^2$, $y = x+6$ **c)** $y = x^4$, $y = x^3$ **d)** $x+(y-1)^2 = 1$, $x = 0$

5. Zmień kolejność całkowania i oblicz (prostszą wersję). **z)** $\int_0^{2\pi} \int_1^e (\sin y) x^{1/x} dxdy$

a) $\int_2^3 \int_0^{\sqrt{y}} x^3\,dxdy$ **b)** $\int_1^2 \int_1^y xy\,dxdy$ **c)** $\int_{-1}^1 \int_{|y|-1}^{1-|y|} x+y^2\,dxdy$ **d)** $\int_1^2 \int_{2-x}^{x^2} 1\,dydx$

e) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 6x+y\,dydx$ **f)** $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} y+2\,dydx$ **g)** $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} 3x\,dydx$ **h)** $\int_1^2 \int_3^5 \int_6^9 z\,dxdydz$

6. Oblicz:

a) $\iint\limits_L xy\,d\omega$, gdy L jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,-1)$

b) $\iint\limits_T e^x\,d\omega$, T - trapez o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,0)$

c) $\iint\limits_R |x^2 - y|\,d\omega$, $R = [0,1]\times[0,1]$

d) $\iint\limits_K x\,d\omega$, gdy K jest kołem ośrodku $(3,4)$ i promieniu 2. (Można sprytnie :)

Przykład. (jak w zadaniu 3.)

$$\int_0^6 \int_0^1 xy + ye^x\,dxdy = \int_0^6 \left(\int_0^1 xy + ye^x dx \right) dy = \int_0^6 \left[\tfrac{1}{2}x^2y + ye^x\right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^6 y\left(e - \tfrac{1}{2}\right) dy = \left[\tfrac{1}{2}y^2\left(e-\tfrac{1}{2}\right)\right]_0^6 = 18\left(e - \tfrac{1}{2}\right) = 18e - 9$$

$$\int_0^6 \int_0^1 xy + ye^x\,dxdy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,6]} xy + ye^x\,d\omega$$