Analiza matematyczna 3. Lista 9.

1. Zapisz $\iint_S f(x,y)\,d\omega$ jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych w układzie biegunowym i w układzie kartezjańskim:

a) $S=\{(x,y): x^2+y^2\le\sqrt{2}\wedge x\le 0\}$ **b)** $S=\{(x,y): x^2+y^2\le 4x\wedge |y|\sqrt{3}\le x\}$

c) $S=\{(x,y): 4\le x^2+y^2\le 4y\}$ **d)** $S=\{(x,y): |y|\le x\le 4\}$ **e)** $S=[0,1]^2$

2. Wyraź całki we współrzędnych biegunowych i oblicz je.

a) $\int\limits_0^1\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}}\sin(x^2+y^2)\,dxdy$ **b)** $\int\limits_0^2\int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{y^2}{x^2+y^2}\,dydx$ **c)** $\int\limits_1^2\int\limits_0^x\pi\,dydx$

d) $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x\sqrt{3}}xy\,dydx+\int\limits_1^2\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}xy\,dydx$ **e)** $\int\limits_{-3}^{3/\sqrt{2}}\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}\frac{x}{x^2+y^2}\,dydx$

g) $\int\limits_0^3\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}|x+y|\,dydx$ **h)** $\int\limits_0^1\int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}x^2+y^2\,dydx$ **i)** $\iint\limits_{x^2+y^2<2y}x^2+y^2\,d\omega$

3. Oblicz całki **a)** $\iiint_N x^2+y d\omega,\ N=\{(x,y,z); x,y,z\in\mathbb{R}_+\cup\{0\},\ x+y+z\le 1\}$

b) $\iint_M x^3 d\omega,\ M=\{(x,y): 4x^2+y^2\le 4\}$ **c)** $\iint_R |x^2-y|d\omega,\ R=[0,1]\times[0,1]$

d) $\iiint\limits_O 1\,d\omega,\quad O=\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\le 1, x,y\ge 0\}$ **e)** $\iiint\limits_{[-a,a]^3}|y|+|z|\,d\omega$

4. Obliczyć objętość obszaru (a-f: ograniczonego powierzchniami):

a) $x+y+z=4,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ **b)** $z=4,\ x^2+y^2=z$

c) $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z^2$ **d)** $2z=(x-1)^2+y^2,\ x+z=5$

e) $z=4x+2y,\ x^2+y^2=1,\ z=0$ **f)** $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=z^2,\ z=0$

g) $\{(x,y,z): z^2+4\le x^2+y^2+z^2\le 9\}$ **h)** $\{(x,y,z): |x|+|y|+|z|\le 9\}$

5. Wyznacz pole powierzchni **a)** wykresu f-cji $f: P\to\mathbb{R},\ f(x,y)=a\sqrt{x^2+y^2}$

b) bryły $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+5\le x^2+y^2+z\le 9\}$ **b')** bryły $x^2+y^2+|z|\le 9$

c) części pow. $z=x^2$ leżącej nad trójkątem o wierzch. (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0).

d) części sfery $16=x^2+y^2+z^2$ leżącej w walcu **d')** $x^2+y^2=4$ **d")** $x^2+y^2=4x$

e) części wspólnej dwóch kul o promieniu R, których środki leżą w odległości $2a$

f) płata $f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$ nad trójkątem o wierzchołkach $(0,0),(0,1),(7,1)$

6. Znajdź p takie, że objętość B jest równa 1, gdy B jest ograniczona powierzchniami

a) $x^2+y^2=z^2,\ z=p$ **a')** $x^2+y^2=pz^2,\ z=1$ Wsk.a),a') można bez całek

b) $x^2+y^2=z,\ z=p$ **b')** $x^2+y^2=pz,\ z=1$

7. Czy równoleżniki: 0, $\pm 30^\circ$, $\pm 60^\circ$ dzielą skorupę ziemską (=sferę) na 6 części o jednakowym polu?

7.** Niech $\gamma=\arcsin(2\sin 10^\circ)\approx 20.32^\circ$. Sprawdź (z Wolframem), że płaszczyzny równoleżników: $0,\gamma,-\gamma$ dzielą kulę ziemską na 4 części o jednakowej objętości.