Analiza matematyczna 3, Lista 1.

1. Jaki odcinek jest opisany poniższą parametryzacją? Jaką ma długość?

a) $G(t) = (|t|+1, 3|t|+4),\ |t| \le 4$ **b)** $H(s) = (|s|, 3|s|+1),\ s \in [1,5]$

c) $x = \sin t + 1, y = 2\sin t + 3,\ \pi \le t \le 4\pi$ **d)** $x = |t|, y = 2|t|, z = 3|t|,\ t^2 \le 1$

e) $x = 2 - 3t,\ y = -4t,\ 0 \le t \le 12$ **f)** $x = e^t,\ y = e^{4+t} + 3,\ 0 \le t \le \log 5$

2. Zaznacz linie opisane parametrycznie (wyznacz zbiory wartości funkcji):
a) $x = t,\ y = -\sqrt{4-t^2},\ t \in [-2,1]$ **b)** $x = -\sqrt{4-t^2},\ y = 4 - t^2,\ t \in [-2,2]$
c) $x = 3\cos(2\pi t) + 1,\ y = 3\sin(2\pi t) + 3,\ t \in [-2,1]$
d) $x = 2\cos(2\pi t) + 1,\ y = 3\sin(2\pi t) + 3,\ t \in [-2,1]$
e) $x = 2\cos(2\pi t) + 1,\ y = 3\cos(2\pi t) + 3,\ t \in [-2,1]$; jaką ma długość?
f) $x = 2\cos(2\pi t) + 1,\ y = 3\cos^2(2\pi t) + 3,\ t \in [-2,1]$
g) $x = 2\cos(2\pi t) + 1,\ y = 3\sin^2(2\pi t) + 3,\ t \in [-2,1]$
h) $x = \cos(2\pi t),\ y = \sin(2\pi t) + 2[t+2],\ t \in [-2,1]$, gdzie $[s]$ – część całkowita s
i) $x = 2t+3,\ \ y = 3t+4,\ \ z = 4t+5,\ \ t \in [-1,3]$; jaką ma długość?
j) $x = 2t^2+3,\ \ y = 3t^2+4,\ \ z = 4t^2+5,\ \ t \in [0,2]$; jaką ma długość?
k) $x = 2t^2+3,\ \ y = 3t^2+4,\ \ z = 4t^2+5,\ \ t \in [-1,2]$

3. Podaj opis jakiejś wędrówki: **a)** po linii $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4y,\ x \ge 1\}$
b) po linii $L = \{(x,|x|) : x \in [-1,2]\}$ **b')** $L' = \{(x,y) : y = ||x-1|-2|,\ |x| \le 5\}$
c) po brzegu jakiegoś: kwadratu, **c')** trójkąta **c")** po (jakiejś) ósemce

4. Zbiór wartości funkcji $F : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nazywany jest *linią śrubową*. Opisz gwint śruby o średnicy 12mm i skoku 2mm.

5. Wzór $M(t) = (5\cos(\pi/2 - 2\pi t),\ 5\sin(\pi/2 - 2\pi t))$, $t \in [0,24]$ opisuje położenie końca minutowej wskazówki (o długości ...) zegarka jako funkcję czasu.
a) Opisz ruch końca małej wskazówki o długości 3
b) Opisz długość odcinka łączącego końce wskazówek (jako funkcję czasu).
c) Opisz ruch końca sekundnika o długości 6.
d*) Jak zmienić powyższe, gdy zegar późni się (jednostajnie) 5 minut na dobę?

6. Czy jadące pojazdy A i B:
$$x_A = t+1,\ y_A = 4t+3,\ t \in \mathbb{R}_+\ ,\quad x_B = t-5,\ y_B = 2t+1,\ t \in \mathbb{R}_+$$
kiedyś się zderzą? Jeśli tak, to kiedy? Jeśli nie, to jak blisko miną się?

7. W ruchu: $x_t = \cos t,\ y_t = \sin t,\ z_t = \sin 2t;,\ t \in \mathbb{R}_+$ szybkość jest zmienna.

a) Kiedy jest największa? Kiedy jest najmniejsza?

b*) Czy w tym ruchu podjazd jest wolniejszy od zjazdu (jak w realu)?

c)** Jeśli nie, to zmodyfikuj opis ruchu tak, by był (nieco) bardziej realny.

Zadanie dodatkowe

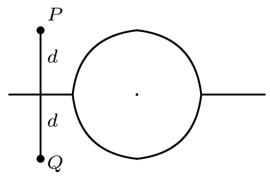
Na rysunku obok widać z góry... pana Jo (Chińczyka w kapeluszu), który jedzie na rowerze i na bagażniku wiezie drąg PQ długości $2d = 1$.

8*. Zakładamy, że pan Jo jedzie po wykresie f-cji $f(x) = x^2$, dokładniej: środek drąga przemieszcza się nad wykresem.

a) Wyznacz równania linii, które wykreślają końce drąga.

b) Powtórz a), gdy $d = 1$ oraz gdy $d = 0{,}3$.

c) Czy te linie są wykresami funkcji (z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$)?
(Zobacz w komputrze.)



Jo

8.** Zadanie 8* nie jest sformułowane precyzyjnie (jednoznacznie). Doprecyzuj je.