Analiza matematyczna 3. Lista 10.

1. Które całki można obliczyć BEZ rachunku całkowego? **a)** $\iint\limits_{[0,1]^2} 2x+3y\,d\omega$

b) $\iint\limits_{[0,1]^2} e^{[x+y]}\,d\omega$ **c)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} e^{[x+y]}\,d\omega$ **d)** $\iint\limits_{[0,1]^2} x^2y^3\,d\omega$ **e)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} x^2y^3\,d\omega$

f) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2y^3\,d\omega$ **g)** $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\,d\omega$ **h)** $\iint\limits_{[-1,1]^2} |x+y|\,d\omega$

2. Niech ω_n oznacza podział $[0,1]^2$ na n^2 przystających kwadratów ($n\in\mathbb{N}$, $n\ge 10^6$). Dla $\iint\limits_{[0,1]^2} f(x,y)\,d\omega$ oblicz (sprytnie) różnicę $S_{\omega_n}-s_{\omega_n}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\omega_n}-s_{\omega_n}$, gdy

a) $f(x,y)=[y^7]$ **b)** $f(x,y)=\{y\}$ **c)** $f(x,y)=y^2$ **d)** $f(x,y)=x+y$

e) $f(x,y)=[\pi y]$ **f)** $f(x,y)=\pi x+ey$ **g)** $f(x,y)=e^y$ **h)** $f(x,y)=e^x+y^5$

* * *

3. Oblicz całki iterowane (podaj całki podwójne/potrójne, z których powstały).

a) $\int\limits_2^4\int\limits_3^7 xy\,dxdy$ **b)** $\int\limits_1^2\int\limits_{x-1}^{x+1} xy\,dydx$ **c)** $\int\limits_4^6\int\limits_1^2\int\limits_2^3 xyz\,dxdydz$ **d)** $\int\limits_0^1\int\limits_0^{2-2x}\int\limits_0^2 yz^2\,dzdydx$

4. Zapisz $\iint\limits_A y\,d\omega$ jako całkę iterowaną i oblicz, gdy A jest ograniczony przez linie

a) $|x|=2$, $|y|=1$ **b)** $y=x^2$, $y=x+6$ **c)** $y=x^4$, $y=x^3$ **d)** $x+(y-1)^2=1$, $x=0$

5. Zmień kolejność całkowania i oblicz (prostszą wersję). **z)** $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^e (\sin y)x^{1/x}\,dxdy$

a) $\int\limits_2^3\int\limits_0^{\sqrt{y}} x^3\,dxdy$ **b)** $\int\limits_1^2\int\limits_1^y xy\,dxdy$ **c)** $\int\limits_{-1}^1\int\limits_0^{1-|y|} y^2\,dxdy$ **d)** $\int\limits_1^2\int\limits_{2-x}^{x^2} 1\,dydx$

e) $\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 6x+y\,dydx$ **f)** $\int\limits_{-2}^2\int\limits_0^{4-x^2} y+2\,dydx$ **g)** $\int\limits_0^2\int\limits_0^{4-x^2} 3x\,dydx$ **h)** $\int\limits_1^2\int\limits_3^5\int\limits_6^9 z\,dxdydz$

6. Oblicz:

a) $\iint\limits_L y\,d\omega$, gdy L jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,-1)$

b) $\iint\limits_R |x^2-y|\,d\omega$, gdzie $R=[0,1]\times[0,1]$

c) $\iint\limits_K x\,d\omega$, gdy K jest kołem o środku $(3,4)$ i promieniu 2. (Można sprytnie :)

Zadanie 1 jest dość trudne. Warto spróbować je zrobić samodzielnie.

Spostrzeżenia. (pomocne w zadaniu 2.)

♣ Gdy obliczamy $S_\omega - s_\omega$, wystarczy patrzeć tylko na te elementy podziału, gdzie f nie jest stała.

♢ $S_\omega - s_\omega = \left(\sum\limits_i \sup\limits_{P_i} f\cdot|P_i|\right) - \left(\sum\limits_i \inf\limits_{P_i} f\cdot|P_i|\right) = \sum\limits_i (\sup\limits_{P_i} f - \inf\limits_{P_i} f)\cdot|P_i|$.

♡ Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole $|P_i|=p$, to $S_\omega - s_\omega = p\cdot\sum\limits_i (\sup\limits_{P_i} f - \inf\limits_{P_i} f)$.

♠ Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica $\sup\limits_{P_i} - \inf\limits_{P_i} = c$, to $S_\omega - s_\omega = c\cdot\sum\limits_i |P_i| = c\cdot|P|$.

Przykład. (jak w zadaniu 3.)

$$\int\limits_0^6\int\limits_0^1 xy+ye^x\,dxdy = \int\limits_0^6\left(\int\limits_0^1 xy+ye^x\,dx\right)dy = \int\limits_0^6\left[\tfrac{1}{2}x^2y+ye^x\right]_0^1 dy =$$

$$= \int\limits_0^6 y\left(e-\tfrac{1}{2}\right)dy = \left[\tfrac{1}{2}y^2\left(e-\tfrac{1}{2}\right)\right]_0^6 = 18\left(e-\tfrac{1}{2}\right) = 18e-9$$

$$\int\limits_0^6\int\limits_0^1 xy+ye^x\,dxdy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,6]} xy+ye^x\,d\omega$$

(P)odpowiedzi do niektórych zadań z listy 10. (wg Maximy)

2. **a)–g)** $S_{\omega_n}-s_{\omega_n}$: $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{\pi+e}{n}$, $\frac{e-1}{n}$ (odpowiednio)

3. Wartości całek: a) 120, b) $\frac{14}{3}$, c) $\frac{75}{2}$, d) $\frac{16}{9}$

4. Wartości całek: b) $\frac{250}{3}$, c) $\frac{1}{63}$, d) $\frac{8}{15}$

5. Wartości całek: a) $\frac{19}{12}$, b) $\frac{9}{8}$, c) $\frac{1}{6}$, d) $\frac{11}{6}$, e) $\frac{89}{70}$, f) $\frac{192}{5}$, g) 12, h) 9

6. Wartości całek: b) $\frac{11}{30}$, c) 12π