

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 11.

1. Wyraż całki we współrzędnych biegunowych. Oblicz je.

a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \sin(x^2 + y^2) dx dy$ b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y dy dx$ c) $\int_1^2 \int_0^x \pi dy dx$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}} xy dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx$ e) $\int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \int_{|x|}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx$

g) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} |y - \sqrt{3}x| dy dx$ h) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$ i) $\iint_{x^2 + y^2 \leq y} \sqrt{x^2 + y^2} d\omega$

2. Zapisz $\iint_S f(x, y) d\omega$ jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych w układzie biegunowym i w układzie kartezjańskim:

a) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \sqrt{2} \wedge x \leq 0\}$ b) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x \wedge |y| \leq \sqrt{3}x\}$

c) $S = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 4y\}$ d) $S = \{(x, y) : |y| \leq x \leq 4\}$ e) $S = [0, 1]^2$

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami (gdy jest więcej niż jedna, to oblicz objętość najmniejszej):

a) $x + y + z = 4, x = y, y = 0, z = 0$ b) $z = 4, x^2 + y^2 = z$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x^2 + y^2 = z^2$ d) $2z = (x - 1)^2 + y^2, x + z = 5$

e) $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 20$ f) $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = z^2, z = 0$

4. Wyznacz pole powierzchni

a) płata $f(x, y) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ nad trójkątem $\Delta(0, 0), (0, 1)(1, 0)$

b) części pow. $z = x^2$ leżącej nad trójkątem o wierzch. $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)$

c) bryły $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + 5 \leq x^2 + y^2 + z \leq 9\}$ c') bryły $x^2 + y^2 + |z| \leq 9$

d) części sfery $16 = x^2 + y^2 + z^2$ leżącej w walcu d') $x^2 + y^2 = 4$ d'') $x^2 + y^2 = 4x$

e) wykresu f-cji $f : P \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2}$

5. Znajdź p takie, że objętość B jest równa 1, gdy B jest ograniczona powierzchniami

a) $x^2 + y^2 = z^2, z = p$ a') $x^2 + y^2 = pz^2, z = 1$ WSK.a), a') można bez całek

b) $x^2 + y^2 = z, z = p$ b') $x^2 + y^2 = pz, z = 1$

6. Czy równoleżniki: $0, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ$ dzielą skorupę ziemską (=sferę) na 6 części o jednakowym polu?

(P)ODPOWIEDZI do niektórych zadań z listy 11. (wg Maximy)

$$\int \cos^3 \varphi d\varphi = \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + C \quad \left(\text{bo } \cos^3 \varphi = \cos \varphi \cdot (1 - \sin^2 \varphi) \right)$$

$$\int \sin^3 \varphi d\varphi = -\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + C$$

1. a) $\frac{\pi}{2}(1 - \cos 1)$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $3\sqrt{2}$ g) $27 - 9\sqrt{3}$ h) $\frac{4}{9}$

3. a) $\frac{16}{3}$ b) 8π c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{81\pi}{4}$ e) $\frac{8\pi}{3}(10\sqrt{5} - 19)$ f) $\frac{256}{3}$

4. a) $\frac{4+4\sqrt{2}}{15}$ b) $\frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)$ c') $\frac{\pi}{3}(37\sqrt{37} - 1)$ d') $32\pi(2 - \sqrt{3})$ d'') $16(\pi - 2)$