# Analiza matematyczna 3. Lista 12.

**1.** Wyraź całki we współrzędnych cylindrycznych i oblicz je.

**a)** $\iiint\limits_A x^2+y^2\;dV$ gdzie $A$ jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=4$

**b)** $\iiint\limits_B z\,dV$ dla $B=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y,z\ge 0\}$ **c)** $\int\limits_0^3\int\limits_0^x\int\limits_0^2 x\;dzdydx$

**d)** $\iiint\limits_D y^2\;dV$ gdzie $D$ jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1$

**2.** Wyraź całki jako całki iterowane w nowych podanych współrzędnych (nie obliczaj ich)

**a)** $\int\limits_1^2\int\limits_4^9 x\sqrt{y}dydx\ \begin{cases} x=u\\ y=v^2\end{cases}$ **b)** $\iint\limits_{\substack{1\le x+y\le 2\\ 3\le y-x\le 4}} xyd\omega\ \begin{cases} x=u-v\\ y=u+v\end{cases}$ **c)** $\int\limits_1^2\int\limits_0^{x^2} ydydx\ \begin{cases} x=\sqrt{u}\\ y=v\end{cases}$

**3.** Znajdź nowe współrzędne, w których obszar całkowania jest kołem o środku (0,0), lub jego częścią i wyraź całki w nowych podanych współrzędnych (nie obliczaj ich)

**a)** $\iint\limits_{(x-3)^2+(y-4)^2\le 9} xy\;d\omega$ **b)** $\iint\limits_{\substack{(4x-12)^2+9y^2\le 4\\ y\le 0,\ x\ge 3}} xy\;d\omega$ **c)** $\int\limits_0^2\int\limits_{-3\sqrt{4-x^2}}^{3\sqrt{4-x^2}} xy\;dydx$

**3'.** Oblicz: **a)** $\iint\limits_{(x+5)^2+4(2y+1)^2\le 9} xy\;d\omega$ **b)** $\iint\limits_{(x+y)^2+(2x+3y)^2\le 4} xy\;d\omega$

**4.** Wyraź całki w nowych podanych współrzędnych i oblicz je.

**a)** $\int\limits_2^3\int\limits_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} xy\;dydx\ \begin{cases} s=x\\ t=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ **b)** $\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}(x+y)^{10}dydx\ \begin{cases} x=s\cos^2 t\\ y=s\sin^2 t\end{cases}$

* * *

**5.** Uzasadnij, że przejście z ukł. sferycznego na kartezjański ma jakobian $J=r^2\sin\theta$.

**6.** Przedstaw całkę $I=\iiint\limits_V x^2+y^2+z^2\;dV$ jako całkę iterowaną we współrzędnych

**a)** cylindrycznych **b)** sferycznych **c)** kartezjańskich,

gdy $V$ jest mniejszą z brył ograniczonych pow. $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2=4$. Oblicz też wartość $I$.

(P)odpowiedzi do niektórych zadań z listy 12.

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\;dx=\int x^2\cdot\big(-\tfrac13(a^2-x^2)^{3/2}\big)'\;dx=...$$

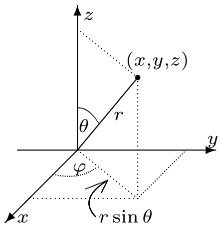
**1. a)** $2\pi$ **b)** $\frac{\pi}{16}$ **c)** 18 **d)** $\frac{2\pi}{5}(\frac{64}{3}-11\sqrt{3})\ \vee\ \frac{22\pi}{5}\sqrt{3}$

**3'. a)** $\frac{45}{8}\pi$ **b)** $\pm 12\pi$ (jest tu wiele zer!)

**4. a)** $\frac{45}{4}$ **b)** $\frac{1}{12}$

**6.** $I=\frac{32\pi}{5}(2-\sqrt{3})$

## Układ sferyczny




Podpisując długości kresek za pomocą $r,\varphi,\theta$ otrzymujemy wzór

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$$

przekształcenia z 'nieskończonego pół-prostopadłościanu'

$$0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ r\ge 0$$

(w układzie $Or\theta\varphi$) na całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ (w układzie $Oxyz$).

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

W tym przekształceniu obrazem prostokąta: $r=0,\ 0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$ jest punkt $(0,...,...)$, a obrazem prostokąta $r=3$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$ jest sfera o równaniu $x^2+y^2+z^2=....$ Obrazem półprostej $\theta=\frac{\pi}{4}=\varphi$ jest półprosta $x=y=$ ...... Inne przykłady (strzałka $\to$ oznacza 'jest przekształcane na'): $\theta=0\to$ półoś $O...$, $\theta=\frac{\pi}{...}\to$ pow. stożka $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\frac{\pi}{2}\to$ pł. $z=...$ , $r\in$ ... $\to$ obszar $4<x^2+y^2+z^2\le 9$, $r\le 3\cos\theta\to$ kula $x^2+y^2+(z-...)^2\le ...$, $r\le -3\cos\theta\to$ kula $x^2+y^2+(z-...)^2\le ...$, $r=\frac{4}{\cos\theta}\to$ płaszczyzna $z=...$ .

Przykład. Dla różnicy kul $V=\{(x,y,z): 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$ obliczamy:

$$\iiint\limits_V z^2=\iiint\limits_{V'} r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_1^2 r^4\cos^2\theta\sin\theta\;dr\right)d\theta\right)d\varphi=...=\frac{124}{15}\pi.$$