Analiza matematyczna 3. Lista 13.

1. Oblicz całki krzywoliniowe nieskierowane: $\int\limits_A |x|+y\;ds,\ A=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$,

$\int\limits_B x(\operatorname{arctg} y)^7\;ds,\ B=\{(x,x^2): |x|\le 1\}$, $\int\limits_C x+y\;ds,\ C=\{(x,y): x^2+y^2=2x+4y\}$,

$\int\limits_D \frac{ds}{x^2},\ D=A\cap([\frac12,2]\times\mathbb{R})$, $\int\limits_E \frac{y}{\sqrt{4x^2+1}}\;ds,\ E=\{(x,x^2): -1\le x\le 2\}$, $\int\limits_E x\;ds$,

$\int\limits_F x-y-z\;ds,\ F=$ odcinek $(1,2,3)(6,5,4)$, $\int\limits_G z^2\,ds,\ G=\{(x,2x,2x): x\in[0,2]\}$

2. Oblicz całki powierzchniowe **a)** $\iint_S x\,dS$, gdzie $S=[0,1]^3\setminus(0,1)^3$

b) $\iint\limits_{\substack{2x+4y+2z=8\\ x,y,z\ge0}} xz\;dS$ **c)** $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=4\\ x,y,z\ge0}} yz\;dS$, **d)** $\iint\limits_{\substack{(x+y)^2+z^2=1\\ x,y,z\ge0}} \sqrt{\frac{1-(x+y)^2}{1+(x+y)^2}}\;dS$

e) $\iint\limits_{z=x^2+y^2,\ x,y\in[0,1]} xy\,dS$ **f)** $\iint\limits_P 2x+z\;dS,\ P=\{(x,y,3-2x+2y): x,y\in[0,5]\}$

g) $\iint\limits_W y+x^2dS$, gdy W jest powierzchnią boczną walca $x^2+y^2=9,\ 0\le z\le 2$

* * *

3. Niech $K=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=9,\ z\ge0\}$. Znajdź masę K, gdy gęstość w punkcie (x,y,z) jest równa **a)** odległości (x,y,z) od płaszczyzny $z=0$
b) kwadratowi odległości (x,y,z) od płaszczyzny $z=0$

3'. Niech $K=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=9,\ z\ge0\}$ oraz $L=K\cap(\{0\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Znajdź masę L, gdy gęstość w punkcie (x,y,z) jest kwadratem odległości (x,y,z)

x) od osi OX **y)** od osi OY **z)** od osi OZ **xy)** od płaszczyzny $z=0$

4. Zakładając, że gęstość jest stała, znajdź środek masy **a)** $\{(x,y): 0\le y\le 1-x^2\}$
b) półokręgu **b')** półkola **b")** półkuli **b"')** półsfery

UMOWA. Poniżej 'wyznacz' oznacza 'zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych'. Niektóre z tych całek można obliczyć 'do końca' – które?

5. Wyznacz masę powierzchni bocznej stożka o wysokości H i pr. podstawy R, gdy gęstość (powierzchniowa) jest kwadratem odległości:

a) od podstawy **b)** od wierzchołka **c)** od środka wysokości

5'. Wyznacz energię kinetyczną powierzchni z zadania 5., gdy kręci się wokół wysokości w tempie 7 obrotów na sekundę.

6. Wyznacz masę piramidy o wysokości 3 i podstawie 2×2, jeżeli gęstość jest proporcjonalna
a) do kwadratu odległości od wierzchołka i w środku podstawy jest równa 3
b) do sześcianu odległości od podstawy i w (górnym) wierzchołku jest równa 5.

(P)odpowiedzi do niektórych zadań z listy 13.

Dla $n=1..8$ ciąg $a_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ jest równy $\left(1,\frac{\pi}{4},\frac{2}{3},\frac{3\pi}{16},\frac{8}{15},\frac{5\pi}{32},\frac{16}{35},\frac{35\pi}{256}\right)$.

1. A) 4 **C)** $6\sqrt5\pi$ **D)** $2\sqrt3$ **G)** 32

2. a) 3 **b)** $\frac{16}{3}\sqrt6$ **c)** $\frac83$ **d)** $\frac12$ **e)** $\frac{122-25\sqrt5}{120}$ **f)** 600 **g)** 54π ('na palcach')

3. a) 27π **b)** 54π

3'. x) 27π **y)** $\frac{27}{2}\pi$ **z)** $\frac{27}{2}\pi$ **xy)** $\frac{27}{2}\pi$

4. a) $(0,\frac25)$ odl. od środka: **b)** $\frac{2}{\pi}R$ **b')** $\frac{4}{3\pi}R$ **b")** $\frac38R$ **b"')** $\frac12R$

5. a) $\frac16\pi H^2R\sqrt{R^2+H^2}$ **b)** $\frac16\pi R\sqrt{R^2+H^2}\,(3R^2+H^2)$

5'. a) $\frac{49}{15}\pi^3H^2R^3\sqrt{R^2+H^2}$ **b)** $\frac{49}{15}\pi^3R^3\sqrt{R^2+H^2}\,(10R^2+H^2)$

6. a) $\frac{116}{15}$ **b)** 1

Ściąga. Niech figura $B\subseteq\mathbb{R}^2$ ma gęstość powierzchniową $\rho=\rho(x,y)$. Współrzędne jej środka masy $S=(S_x,S_y)$ wyrażają się wzorami

$S_x=\frac1M\iint\limits_B x\cdot\rho(x,y)\,d\omega,\ S_y=\frac1M\iint\limits_B y\cdot\rho(x,y)\,d\omega$, gdzie masa $M=\iint\limits_B\rho(x,y)\,d\omega$.

Analogiczne są wzory na środek masy S bryły $B\subseteq\mathbb{R}^3$ o gęstości $\rho=\rho(x,y,z)$.

Uwaga.
Przy liczeniu środka masy, dość często wystarczy liczyć tylko jedną współrzędną; pozostała(e) bywają oczywiste (z symetrii zbioru i własności gęstości).