Analiza matematyczna 3. Lista 14.

0. Oblicz 'na palcach' **a)** $\int\limits_{(1,1)(9,2)} (1,4)\circ d\vec{r}$ **b)** $\int\limits_{brzeg[0,1]^2} (1,4)\circ d\vec{r}$ **c)** $\int\limits_{x^2+y^2=4} (x,y)\circ d\vec{r}$

1. Oblicz całki krzywoliniowe skierowane (korzystając z parametryzacji krzywych)

a) $\int_A \vec{F}\circ d\vec{r}$, dla $\vec{F}(x,y)=(xy,x)$, gdzie A – odcinek od $(0,1)$ do $(3,3)$

b) $\int_B x^2\,dx+(x-y)\,dy$, B – część paraboli $y^2=x$ od $(1,-1)$ do $(1,1)$

c) $\int\limits_{(1,0,3)(2,3,1)} (x+3z)\,dx+y\,dz$ **d)** $\int\limits_D (x^2+y^2,5)\circ d\vec{r}$, $D=$ okr. o śr. (0,2) i pr. 2

2. Oblicz całkę, gdy Γ jest krzywą gładką (wykorzystując potencjał pola)

a) $\int_\Gamma (\pi x+y)\,dx+(x-2y)\,dy$, krzywa Γ od $A=(0,1)$ do $B=(2,3)$

b) $\int_\Gamma (e^x+y^2)\,dx+2y(x+1)\,dy$, krzywa Γ od $A=(0,1)$, $B=(s,t)$

c) $\int_\Gamma y\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz$, krzywa Γ od $A=(-1,1,0)$ do $B=(3,4,5)$

3. Oblicz całkę $\int_K \vec{F}\circ d\vec{r}$, gdzie K jest brzegiem Ω (korzystając z tw. Greena)

a) $\vec{F}(x,y)=(y^2-y,(x+y)^2)$, $\Omega=\{(x,y): x^2+y^2\le 2y\}$ **a')** $\Omega=[0,1]^2$

b) $\vec{F}=(P,Q)$, gdzie $P=xe^{x^2+y^2}$, $Q=ye^{x^2+y^2}$ i $\Omega=\{(x,y): 4x^2+9y^2\le 1\}$

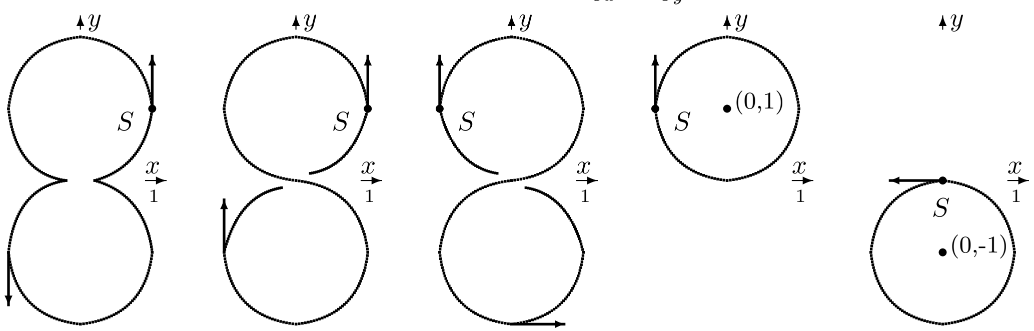
c) $\vec{F}=(0,xy)$, $\Omega=[0,2]\times[0,3]$ **c')** $\Omega=\{(x,y): x^4+y^4\le 1\}$

4. Oblicz $\oint\limits_{x^2+5y^2=17} x^{2021}e^{2022y}\,dx+x^{2022}e^{2022y}\,dy$

5. Przemieszczenie masy w polu sił $\vec{F}=[2y,x+y^2]$ od punktu $A(1,1)$ do $B(0,0)$ wymaga energii. Mniejsza będzie wzdłuż **a)** linii $y=x^2$, czy wzdłuż **b)** odcinka AB?

5'. Czy można to rozstrzygnąć **bez** liczenia **dwóch** całek?

6. Okręgi D,E i ich sumy A,B,C są skierowane od S do S, jak pokazano poniżej. Pole $\vec{F}=(P,Q)$ określone na $\mathbb{R}^2$ jest takie, że $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y+6+x^9$. Oblicz:



A B C D E

$\int\limits_A \vec{F}\circ d\vec{r}=\ \dots$ $\int\limits_B \vec{F}\circ d\vec{r}=\ \dots$ $\int\limits_C \vec{F}\circ d\vec{r}=\ \dots$ $\int\limits_D \vec{F}\circ d\vec{r}=\ \dots$ $\int\limits_E \vec{F}\circ d\vec{r}=\ \dots$

7. Niech $K=\{(x,y): x^2+y^2=1, y\ge 0\}$, $M=\{(x,y): y=|x|-1, x\in[-1,1]\}$, $L=[-1,1]\times\{0\}$, oznaczają krzywe skierowane od $(1,0)$ do $(-1,0)$.

Oblicz $\int_K P\,dx+Q\,dy$ i $\int_M P\,dx+Q\,dy$ wiedząc, że:

a) $Q'_x-P'_y=6$ i $\int_L P\,dx+Q\,dy=2$ **b)** $Q'_x-P'_y=x^{17}$ i $\int_L P\,dx+Q\,dy=\sqrt{2}$

8. Oblicz $\int\limits_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ d\vec{r}$, gdy Γ jest brzegiem Ω skierowanym dodatnio i:

a) $\Omega=[3,9]\times[-4,4]$ **b)** $\Omega=\{(x,y): (x-6)^2+y^2\le 5^2\}$

c!) $\Omega=\{(x,y): x^2+y^2\le 5^2\}$ Dlaczego nie można wprost stosować tw. Greena?

d*) $\Omega=[-3,3]\times[-4,4]$ Wsk. Użyj c) i (sprytnie) tw. Greena.

(P)odpowiedzi do niektórych zadań z listy 13.

1. a) $\frac{27}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{9}{2}$ **d)** -16π **2. a)** $2\pi-2$ **b)** $e^s+st^2+t^2-2$ **c)** 33

3. a) π **a')** 2 **c)** 9 **c')** 0 **5.** $\frac{5}{3}<\frac{11}{6}$ **6. A)** 12 **B)** 2π **7. a)** $\int\limits_M \dots=1$ **8. c!)** 2π

.

Ściąga. Poniżej podane są różne (typowe) oznaczenia:

- pole wektorowe: $\vec{F}$, $\vec{F}(x,y)$, (P,Q), $(P(x,y),Q(x,y))$
- parametryzacja krzywej Γ: $\vec{r}$, $\vec{r(t)}$, $(x(t),y(t))$, (x_t,y_t), (x,y),
- całka skierowana: $\int\limits_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}$, $\int\limits_\Gamma (P,Q)\circ d\vec{r}$, $\int\limits_\Gamma P dx+Q dy$, $\int\limits_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Tw. Gdy $\vec{r}:[a,b]\to\Gamma$, $\vec{r}=(x(t),y(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_a^b P(x(t),y(t))\cdot\tfrac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t))\cdot\tfrac{dy}{dt}\;dt\;.$$

Tw. Gdy $\vec{F}=\mathrm{grad}\,f$ i $\vec{r}:[a,b]\to\Gamma$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to

$$\int\limits_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=f(\vec{r}(b))-f(\vec{r}(a))\;.$$

Twierdzenie Greena. Niech $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ będzie obszarem 'bez dziur' ograniczonym krzywą Γ kawałkami gładką, skierowaną dodatnio. Niech $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ będzie polem wektorowym określonym na całym Ω, gdzie P, Q są klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy

$$\int\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_\Omega \tfrac{\partial Q}{\partial x}-\tfrac{\partial P}{\partial y}\;d\omega \qquad \text{[wersja rot]},$$

$$\int\limits_\Gamma -Q\,dx+P\,dy=\iint\limits_\Omega \tfrac{\partial P}{\partial x}+\tfrac{\partial Q}{\partial y}\;d\omega \qquad \text{[wersja div]}.$$