Analiza matematyczna 3. Lista 15.

1. Oblicz pole części wspólnej stożków Λ_1, Λ_2 $(H=R=1)$, które 'stoją' na płaszczyźnie $z=0$ i których środki podstaw są w odległości 1. Odp. $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\sqrt{2})$

2. Oblicz pole powierzchni i objętość części wspólnej dwóch kul o promieniach R.

3. Oblicz objętość bryły V_k, gdy: Wsk. $|V|_{obj} = \iiint_{V_k} 1\,dV = \int_0^3 \Big(\underbrace{\iint 1\,d\omega}_{???} \Big) \underline{\underline{dz}}$

a^k) $V_k = \{(x,y,z) : x,y \in \left[0, (\frac{z}{3})^k\right], z \in [0,3]\}$, dla $k=4$ Wsk. dla $k \in \{0,1,2\}$

b^k) $V_k = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le (\frac{z}{3})^k, z \in [0,3]\}$ dla $k \in \{0,2,1\}$

c^k) $V_k = \{(x,y,z) : (x - \cos(\frac{z}{3}2\pi))^2 + (y - \sin(\frac{z}{3}2\pi))^2 \le (\frac{z}{3})^k, z \in [0,3]\}$, dla $k=0,2$

4. Niech $V = \{(x,y,z) : (x-\frac{z}{3})^2 + y^2 \le (\frac{z}{3})^2, z \in [0,3]\}$ (pochyły stożek).
Uzasadnij, że płaszczyzna $z=3x$ dzieli V na bryły o równych objętościach.
Czy tę własność ma każda płaszczyzna zawierająca punkty $(0,0,0)$, $(1,0,3)$?

* * *

5^k (kliny). Płaszczyzna $z=x$ rozcina U_k na dwie części; mniejszą oznaczmy V_k dla

$$U_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}, \quad U_2 = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Wyznacz: (tj. zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych):
a) objętość V_k **b)** pole pow. V_k **c)** łączną długość 'krawędzi' V_k
d) masę V_k, gdy gęstość jest sześcianem odl. od osi OX **d')** od pł. $x=\frac{1}{2}$
e) energię kinetyczną V_k kręcącego się wokół osi $x=\frac{1}{2}$, $y=0$ w stałym tempie siedmiu obrotów na sekundę, gdy gęstość jest sześcianem odległości od osi OX.

6^k. Powtórz zad.5^k, gdy zamiast $z=x$ weźmiemy płaszczyznę $x=\frac{1}{3}$.

* * *

Powtórka. Drzewiej bywało (na egzaminach). Oczywiście były też całki.

P$_0$. Niech $f(x,y) = \sin(x^2+y^3)$, $g(x,y) = \sin(x^2 \cdot y^3)$, $h(x,y) = x^4 \cdot |y|$.

a) Podaj $f''_{xy}(x,y) = \ \ldots\ -6xy^2\sin(x^2+y^3)$

b) Podaj $g''_{xy}(x,y) = \ \ldots\ 6xy^2\cos(x^2y^3) - 6x^3y^5\sin(x^2y^3)$

c) Dziedziną h'_x jest zbiór $\ldots\ \mathbb{R}^2$

d) Dziedziną h'_y jest zbiór $\ldots\ \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{(0,0)\}$

P$_1$. Zbadaj istnienie granicy funkcji f, g, h w punkcie $p_0=(0,0)$, gdzie
$f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, $h(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^4+y^4}$. Uzasadnij odpowiedź.

P$_2$. Niech l oznacza prostą w przestrzeni opisaną równaniem $(x-1)^2+(y-4)^2=0$. Płaszczyzny styczne do powierzchni $z+xy=x^3+y$ w punktach $(0,1,1)$, $(-1,-2,-5)$ wycinają z prostej l odcinek. Znajdź jego długość.

P$_3$. Linie: $x^2+2y^2=3$ i $y^5+3xy^2+2x^3=4$ przecinają się w punkcie $(1,-1)$. Pod jakim kątem?

P$_4$. Znajdź wszystkie punkty, w których ciągła jest funkcja:

$$f(x,y) = \begin{cases} (e^{x^2y^3}-1)x^{-2} & \text{dla } x \ne 0 \\ 2y^3-5y^2+6y & \text{dla } x=0 \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} (e^{x^3y^2}-1)x^{-3} & \text{dla } x \ne 0 \\ 2y^3+y^2-6y & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

P$_5$. Dla funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ określonej (tylko) na zbiorze $D=[-2,3]\times[-1,4]$ podaj wszystkie punkty z D, w których f osiąga **maksima lokalne**, gdy

a) $f(x,y) = x^2-y^3$ Odp.: $\ldots$ $(-2,-1)$, $(3,-1)$

b) $f(x,y) = x^2-y^2$ Odp.: $\ldots$ $(-2,0)$, $(3,0)$

c) $f(x,y) = x^2y^2$ Odp.: $\ldots$ $(-2,-1)$, $(-2,4)$, $(3,-1)$, $(3,4)$

d) $f(x,y) = (x+y)^2$ Odp.: $\ldots$ $(-2,-1)$, $(3,4)$

P$_6$. Wyznacz wartość największą i najmniejszą f-cji $f(x,y)=x^2+2x-8-y^2+4y$ określonej na $[-3,3]^2$. Podaj wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.

P$_7$. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y)=3x+4y+5(x^2+y^2)$ na zbiorze $Z=\left\{(x,y) : x^4+2x^2y^2+y^4=x^2+y^2\right\}$. Wyznacz wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.

P$_8$. Znajdź kres górny i kres dolny wartości funkcji f przy podanych warunkach i znajdź wszystkie argumenty, w których te kresy są przyjmowane, gdy:

a) $f(x,y)=x^2y$ gdy $x^2+(y-1)^2 \le 1$.

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ gdy $x^2+y^2=z$ i $x+y=1$.

P$_9$. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą (o ile istnieją) funkcji $f(x,y)=|x^2+y^2-25|+3x+4y$ na zbiorze $W=\left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 10^2\right\}$. Wyznacz wszystkie punkty, w których te wartości są przyjmowane.

P$_{10}$. Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

$$x^3y+y^3z^4=7+x+y+z \quad \text{w punkcie } A=(2,1,-1).$$

Znajdź punkty przecięcia tej płaszczyzny z osiami układu współrzędnych.

Odp.: $z=\frac{11}{5}x+2y-\frac{37}{5}$, przecięcia z osiami: $(0,0,-\frac{37}{5})$, $(\frac{37}{11},0,0)$, $(0,\frac{37}{10},0)$.