

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 3.

c.1. Oblicz granice ciągów: $a_n = \left(\frac{3+n}{4+5n}, \frac{\sin(n^2+2)}{n+1} \right)$, $b_n = \left(\frac{1}{n}, n \sin \frac{1}{n}, \frac{n}{n+1} \right)$.

c.2. Niech $f(x,y) = \frac{x}{y}$. Podaj przykład ciągu $a_n = (x_n, y_n)$ zbieżnego do $(0,0)$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ jest równa **a)** 0 **b)** $-\pi$ **c)** $+\infty$. Powtórz dla $f(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$.
* * *

1. Zbadaj istnienie następujących granic, oblicz wartość, jeśli granica istnieje

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ **b)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ **c)** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ **d)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

e) $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^4 \leq y \leq |x|^3}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^6}$ **f)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 3^+ \\ y \rightarrow 4^+}} \frac{\ln y - \ln 4}{x - 3}$ **g)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{y-x^2}$ **i)** $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} e^{y/x^2}$ **j)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^4 + y^4}$ **k)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4}$

l) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ **m)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin x}{y}$ **n)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy \sin(x)}{x^2 + y^2}$ **o)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$

2. Znajdź wartości parametru $p \geq 0$, dla których funkcja f ma granicę w $(0,0)$

a) $\frac{|x|^p y^2}{x^2 + y^2}$ **b)** $\frac{\ln(1 + x^4 y^6)}{x^4 |y|^p}$ **c)** $\frac{|x|^p y^2}{x^2 + y^4}$ **d)** $\frac{|x|^p y^2}{x^8 + y^{20}}$ **e)** $\frac{|x|^p}{x^2 y^4}$

3. Znajdź zbiór punktów ciągłości funkcji f

a) $f(x,y) = y \cdot \operatorname{sgn} x$ **b)** $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x+y)$ **c)** $f(x,y) = [x] + [y-0,1]$

d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \geq y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases}$ **e)** $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1 \\ x + y & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^3)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ y - 2y^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ **g)** $g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^3)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y - 2y^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

h) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 5y - 4 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ **i)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2 y} - 1}{y^2 - 7} & \text{dla } x \neq 0 \\ x & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

4. W zależności od wartości parametru p , podaj zbiór punktów ciągłości funkcji f leżących na brzegu kwadratu $[0,1]^2$, czyli w zbiorze $W = [0,1]^2 \setminus (0,1)^2$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } (x,y) \in [0,1]^2 \\ p & \text{dla } (x,y) \notin [0,1]^2 \end{cases}$ **b)** $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } (x,y) \in [0,1]^2 \\ p & \text{dla } (x,y) \notin [0,1]^2 \end{cases}$