

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 4.

0. Oblicz gradient funkcji **a)** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ **z)** $f(x, y, z) = (x^2 + y^4)z$

1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu; wskaż ich dziedziny.

a) $f(x, y, z) = \arctan(x^2 y^3 z^4)$ **b)** $z = |x| + y$ **c)** $f(x, y) = \begin{cases} 3x & \text{dla } x^2 \leq y \\ y & \text{dla } x^2 > y \end{cases}$

2. Oblicz pochodną kierunkową funkcji. (Doprecyzuj (jakoś) niedoprecyzowane zadania.)

a) $f(x, y) = (x^2 + y^4)^{-1}$ w punkcie $(2, -1)$ w kierunku wektora $(5, 12)$
b) $f(x, y) = 2xy + x^3 y^2$, w kierunku $(1, -2)$ **c)** $f(x, y) = x(x + y)^3$, $(1, 2)$

* * *

3. Niech $f(x, y) = |xy|x^2$, dla $xy \neq 0$ i $f(x, y) = p$, dla $xy = 0$. Dla jakich p

a) f ma pochodną cząstkową f'_x w punkcie $(0, -2)$ **b)** istnieje $f'_y(0, -2)$
c) istnieje $f'_x(-3, 0)$ **d)** istnieje $f'_y(-3, 0)$ **e)** f'_x jest ciągła w $(0, 0)$

4. Podaj zbiór tych wszystkich punktów dziedziny funkcji f , w których:

a) nie istnieje f'_x **b)** nie istnieje f'_y **c)** f nie jest ciągła,

gdys **(i)** $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{dla } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ y & \text{dla } (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1] \end{cases}$ **(ii)** $f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } xy \geq 0 \\ x+y^2 & \text{dla } xy < 0 \end{cases}$

5. Zbadaj istnienie pochodnych cząstkowych i ich ciągłość w punkcie $(0, 0)$ funkcji określonej wzorem: $f(0, 0) = 0$ i dla $(x, y) \neq (0, 0)$

a) $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ **b)** $f(x, y) = \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^2}$ **c)** $f(x, y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$

* * *

6. W podanym punkcie znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $z = (2 + x - y)^2$, $(3, -1, 36)$ **b)** $z = 4x^2 + y^2$, $(2, 1, 17)$

c) $zy + z = x + 2$, $(2, 3, 1)$ **d)** $xyz = 1$, $(\frac{1}{2}, -2, -1)$

e) $\sin(xy) = 2 - z^2$, $(\pi, \frac{1}{2}, -1)$ **f*)** $(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2)$

7. Udowodnij, że płaszczyzny styczne do powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ i $z^2 = x^2 + y^2$ w punkcie $(2, 2, 2\sqrt{2})$ są prostopadłe.

8. Znajdź długość odcinka prostej $x = 2, y = 3$ zawartego między powierzchnią $z = x^2 + y^2$ i płaszczyzną styczną do niej w punkcie $(1, 1, 2)$.