Analiza matematyczna 3. Lista 6.

1. Znajdź wielomian stopnia ≤ 3 o wartościach pochodnych rzędu ≤ 3 w początku ukł. współrzędnych takich samych, jakie ma funkcja zadana wzorem:

a) $e^x \cos y$ **b)** $e^x \ln(1+y)$ **c)** e^{xy} **d)** $x^2 e^{x^2 y^3}$ **e)** $\cos(xyz)$

2. Wyznacz przybliżoną wartość (przybliżając pł.styczną). Oszacuj błąd w a), c).

a) $\sqrt{6{,}02^2 + 8{,}01^2}$ **b)** $\dfrac{8{,}04}{2{,}02}$ **c)** $1{,}02^{3{,}01}$ **d)** $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + 0{,}08^4\right)$

a') $\sqrt{5{,}98^2 + 8{,}01^2}$ **c')** $1{,}01^{3{,}02}$ **c")** $0{,}99^{3{,}05}$ **e)** $\sqrt[3]{5{,}99^2 + 2{,}03^6 + 4{,}97^2}$

3. Znajdź ekstrema lokalne funkcji **a)** $f(x,y) = x + y - 4x^2y^2$

b) $f(x,y) = e^{xy} - x$ **c)** $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$ **d)** $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$

e) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ **f)** $f(x,y) = x^3 - x + y^2$

g) $f(x,y) = 5 - |x| - |y|$ **g')** $f(x,y) = |5 - |x| - |y||$

. **g")** $f(x,y) = \left(5 - x^2 - y^2\right)^2$ **g"')** $f(x,y) = \left(5 - x^2 - y^2\right)^3$

h) $f(x,y) = |5-|x||$ **h')** $f(x,y) = y^2+|5-|x||$ **h")** $f(x,y) = y^3+|5-|x||$

i) $f(x,y) = \operatorname{sgn}(xy) + \{x\},\ D_f = (-2,2]^2$ **j)** $f(x,y) = \begin{cases} 4x & \text{gdy } (x,y) \in [0,1)^2 \\ p & \text{gdy } (x,y) \notin [0,1)^2 \end{cases}$

Wsk. Począwszy od g) nie warto używać algorytmu (z hesjanem).

4. Znajdź ekstrema lokalne funkcji **a)** $f(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - yz$ **c)** $f(x,y,z) = x(1-x) - y^2 + z(1-z)$

d) $f(x,y,z) = x^2 - x^4 + y^4 - y^8 + z^6 - z^{12}$ **e)** $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-3)^2 - 1$

f) Dlaczego w e) Wolfram mówi, że nie znajduje minimów lokalnych?

* * *

Odpowiedzi do niektórych zadań (wg Wolframa):

1: $1 + x + \frac{x^2-y^2}{2} + \frac{x^3-3xy^2}{6}$, $y + \frac{2yx-y^2}{2} + \frac{3yx^2-3y^2x+2y^3}{6}$, $1 + xy$, x^2, 1

2a') 9,996, **2b)** 3,98, **2c')** 1,03, **2c")** 0,97, **2e)** 5,074.

3 lok. ekstr. w: **a)** brak **b)** brak **c)** $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, max. **d)** $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, min.

3 lok. ekstr. w: **e)** $(-1,1)$, min. **f)** $(3^{-1/2}, 0)$, min.

4 lok. ekstr. w: **a)** $(1,1,1)$, max. **b)** $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, min. **c)** $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, max.

4d) $(0,0,0)$, min. oraz max. w 8 punktach (a,b,c), gdzie $a^2 = b^4 = c^6 = \frac{1}{2}$